ALGUNAS CUESTIONES SOBRE ECONOMETRICA

Sobre la identificación y estimación de ecuaciones estructurales

Modelos econométricos.

Un modelo econométrico se proyecta con objeto de estudiar un aspecto del comportamiento de un grupo de individuos, consumidores, productores, etc. Consideraremos en todo lo que sigue que el modelo es lineal y completo. Dos son los problemas principales que se plantean en el tratamiento de estos modelos econométricos:

a) Problemas de identificación.

b) Problemas de estimación de los parámetros que intervienen en el modelo.

Problema de la identificación.

Establezcamos primeramente el concepto de identificación de forma intuitiva. Para ello consideremos un mercado con una sola mercancía; en este mercado el precio p y la cantidad q se determinan por la intersección de dos ecuaciones lineales: la demanda y oferta, las cuales se suponen que reaccionan instantáneamente al movimiento del precio. Las observaciones se suponen realizadas en períodos sucesivos de tiempo.

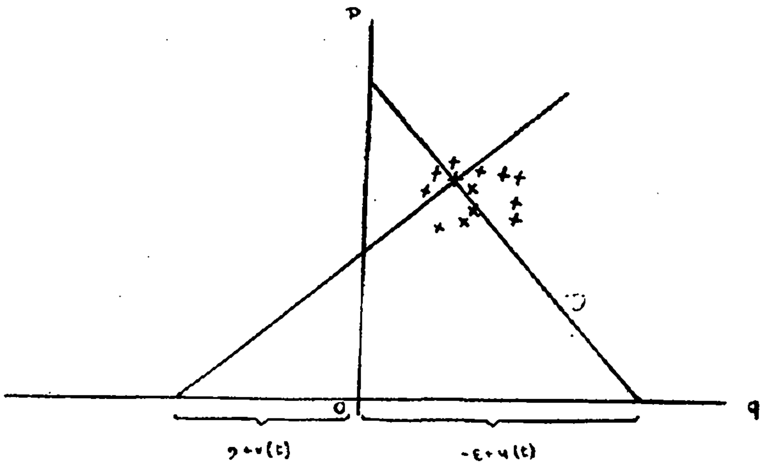
Supongamos las ecuaciones estructurales escritas de la siguiente forma:

$$q + \alpha p + \varepsilon = u(t) \quad \text{(demanda)} \qquad [1]$$

$$q + \gamma p + \eta = v(t) \quad \text{(oferta)} \qquad [2]$$

u y v son variables aleatorias con $\varepsilon(u) = \varepsilon(v) = 0$. Si el bien no es inferior podríamos imponer al modelo la condición supletoria $\alpha > 0$ y $\gamma < 0$.

Consideremos unos valores de α, ε, γ, η que supondremos verdaderos; en este caso, las rectas de demanda y oferta tendrán su intersección con el eje o q en los puntos del mismo que distan de 0; $-\eta + v(t)$ y $-\varepsilon + u(t)$. Luego por cada punto del diagrama pasarán dos rectas, que tendrán esa intersección.



Consideremos ahora unos valores α^*, ε^*, γ^*, η^*; a estos valores corresponderán unas intersecciones $-\eta^* + v(t)$; $-\varepsilon^* + v(t)$, que nos representará otra hipótesis estadística referente a la formación de las variables observadas, siendo imposible saber cuál de estas hipótesis es la verdadera.

Hagamos este razonamiento analíticamente; para ello supongamos que conocemos los verdaderos valores de los parámetros que aparecen en las ecuaciones, y que éstos son α, γ, ε, η. Supongamos que tenemos un interés especial en confundir; para ello multiplicamos la ecuación de demanda por l y la de oferta por k $(0 \leq l \leq 1)$ $l + k = 1$, y después la sumamos, obteniendo:

$$q + (l\alpha + k\gamma)\, p + l\varepsilon + k\eta = lu + kv \qquad [3]$$

ecuación que nosotros decimos es la de demanda.

Evidentemente, esta ecuación es distinta de la [1]; sin embargo, se satisface para los mismos valores que [1]. Cuando por medio de la estadística estimamos los parámetros que intervienen en el modelo, no podemos decir si los parámetros que hemos estimado son los de [1] ó [3], y la ecuación [1] que aparece en el modelo no es identificable.

Una vez establecido el concepto intuitivo de identificación, vamos a tratarlo más rigurosamente. Para ello consideraremos el siguiente modelo lineal completo de G ecuaciones con G variables endógenas:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\, y_1(t) + \alpha_{12}\, y_2(t) + \ldots + \alpha_{1G}\, y_G(t) + \gamma_{11}\, z_1(t) + \ldots + \\
&\qquad + \gamma_{1K}\, z_K(t) = u_1(t) \\
&\alpha_{21}\, y_1(t) + \alpha_{22}\, y_2(t) + \ldots + \alpha_{G2}\, y_G(t) + \gamma_{21}\, z_1(t) + \ldots + \\
&\qquad + \gamma_{2K}\, z_K(t) = u_2(t) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad [4] \\
&\alpha_{G1}\, y_1(t) + \alpha_{G2}\, y_2(t) + \ldots + \alpha_{GG}\, y_G(t) + \gamma_{G1}\, z_1(t) + \ldots + \\
&\qquad + \gamma_{GK}\, z_K(t) = u_G(t)
\end{aligned}$$

y una función de densidad de las variables aleatorias

$$u_1(t),\ u_2(t)\ \ldots\ u_G(t)$$

que designaremos por

$$f\{u_1(t),\ u_2(t)\ \ldots\ u_G(t)\}$$

supondremos, además, que

$$f\{u_1(t)\ \ldots\ u_G(t) \mid z_1(t), z_2(t) \ldots z_K(z)\} = f\{u_1(t)\ u_2(t)\ \ldots\ u_G(t)\}$$

es decir, la distribución de probabilidad de

$$\{u_1(t)\ \ldots\ u_G(t)\}$$

es independiente de

$$z_1(t)\ \ldots\ z_K(t)\,.$$

También supondremos que la distribución de la variable G dimensional

$$\{u_1(t) \;\ldots\; u_G(t)\}$$

es independiente de la de

$$\{u_1(t \pm h) \;\ldots\; u_G(t \pm h)\}$$

y esto para cualquier t.

El sistema [4], por último, deberá cumplir la condición de que $|\Lambda| \neq 0$; siendo Λ la siguiente matriz:

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1G} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{G1} & \alpha_{G2} & \cdots & \alpha_{GG} \end{Vmatrix}$$

El modelo [4], en forma matricial, podría expresarse así:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1G} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2G} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{G1} & \alpha_{G2} & \cdots & \alpha_{GG} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_G(t) \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \cdots & \gamma_{Gk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ z_k(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_G(t) \end{Vmatrix}$$

o en notación reducida

$$\Lambda\, y(t) + \Gamma\, z(t) = u(t)\,. \qquad [5]$$

El sistema [4] cabe considerarlo bajo dos aspectos: uno matemático y otro económico.

Desde el punto de vista matemático, el sistema [4] nos da la distribución de probabilidad de las variables endógenas. Ahora bien, cualquier sistema linealmente combinado de las G ecuaciones lineales [4], con la correspondiente distribución de probabilidad transformada, nos definirá matemáticamente una distribución de probabilidad equivalente en las mismas variables. Estas dos representaciones se dicen que son equivalentes desde el punto de vista de la observación. Haavelmo dice que "son indistinguibles tomando como base de distinción las observaciones. Salta a la vista que desde el punto de vista matemático es indiferente considerar una u otra representación, pero desde el punto de vista económico no; el motivo es el siguiente:

El sistema [4], si tiene algún interés económico, residirá en el hecho de que cada ecuación explica una ley de comportamiento económico, comportamiento de un grupo en el consumo, ley de producción, etc.; es, pues, interesante construir el modelo [4], de forma que el mayor número posible de sus ecuaciones pueda identificarse económicamente; se trata, pues, de estar en condiciones de resolver el siguiente problema: Un investigador A considera el sistema [4], lo combina linealmente y se lo entrega a otro investigador B sin decirle lo que ha hecho. El problema que debe estar en condiciones B de resolver es, en este sistema, identificar las ecuaciones que tienen sentido económico.

Vamos ahora a ver detenidamente el significado matemático de este sistema; supongamos que tenemos las G variables $y_i(t)$ y las k variables $z_k(t)$ observadas en el tiempo $t = 1, 2, ..., T$, o sea, tendremos un conjunto de valores análogos a los siguientes:

$y_1(t)$	....	$y_G(t)$	$z_1(t)$	....	$z_k(t)$
$y_1(1)$		$y_G(1)$	$z_1(1)$		$z_k(1)$
$y_1(2)$		$y_G(2)$	$z_1(2)$		$z_k(2)$
.		.	.		.
.		.	.		.
.		.	.		.
.		.	.		.
.		.	.		.
$y_1(T)$		$y_G(T)$	$z_1(T)$		$z_k(T)$

sustituyendo estos valores en el sistema [4] tendremos, para $t = 1$,

$$\alpha_{11}\, y_1(1) + \alpha_{12}\, y_2(1) + \dots + \alpha_{1G}\, y_G(1) + \gamma_{11}\, z_1(1) + \dots + \\ + \gamma_{1k}\, z_k(1) = u_1(1)$$

....

....

$$\alpha_{G1}\, y_1(1) + \alpha_{G2}\, y_2(1) + \dots + \alpha_{GG}\, y_G(1) + \gamma_{G1}\, z_1(1) + \dots + \\ + \gamma_{Gk}\, z_k(1) = u_G(1)$$

y para $t = T$

$$\alpha_{11}\, y_1(T) + \alpha_{12}\, y_2(T) + \dots + \alpha_{1G}\, y_G(T) + \gamma_{11}\, z_1(T) + \dots + \gamma_{1k}\, z_k(T) = u_1(T)$$

....

....

$$\alpha_{G1}\, y_1(T) + \alpha_{G2}\, y_2(T) + \dots + \alpha_{GG}\, y_G(T) + \gamma_{G1}\, z_1(T) + \dots + \gamma_{Gk}\, z_k(T) = u_G(T)$$

estas ecuaciones nos definen una transformación de las

$$u_1(1) \dots u_G(1) \dots u_1(T) \dots u_G(T)$$

en las

$$y_1(1) \dots y_G(1) \dots y_1(T) \dots y_G(T)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_{11}\, y_1(1) + \dots + \alpha_{1G}\, y_G(1) + 0 + \dots\dots + 0 + \dots\dots + \\
+ \gamma_{11}\, z_1(1) + \dots + \gamma_{1k}\, z_k(1) + 0 + \dots\dots + 0 = u_1(1) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{G1}\, y_1(1) + \dots + \alpha_{GG}\, y_G(1) + 0 + \dots\dots + 0 + \dots\dots + \\
+ \gamma_{G1}\, z_1(1) + \dots + \gamma_{Gk}\, z_k(1) + 0 + \dots\dots + 0 = u_G(1) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 + 0 \dots\dots 0 + \dots\dots + 0 + \alpha_{11}\, y_1(T) + \dots + \alpha_{1G}\, y_G(T) + \\
+ 0 + \dots\dots + 0 + \gamma_{11}\, z_1(T) + \dots + \gamma_{1k}\, z_k(T) = u_1(T) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 + 0 \dots\dots 0 + \dots\dots + 0 + \alpha_{G1}\, y_1(T) + \dots + \alpha_{GG}\, y_G(T) + \\
+ 0 + \dots\dots + 0 + \gamma_{G1}\, z_1(T) + \dots + \gamma_{Gk}\, z_k(T) = u_G(T)
\end{array}\right\} \quad [6]$$

El Jacobiano de la transformación viene dado por la expresión:

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{11} \dots\dots \alpha_{1G} & 0 \quad 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & 0 & \dots\dots & 0 \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{G1} \dots\dots \alpha_{GG} & 0 \quad 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & 0 & \dots\dots & 0 \\
0 \quad \dots\dots \quad 0 & \alpha_{11} \dots\dots + \alpha_{1G} & 0 \dots\dots & 0 & \dots\dots & 0 \\
0 \quad \dots\dots \quad 0 & \alpha_{21} \dots\dots \alpha_{2G} & 0 \dots\dots & 0 & \dots\dots & 0 \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 \quad \dots\dots \quad 0 & \alpha_{G1} \dots\dots \alpha_{GG} & 0 \dots\dots & 0 & \dots\dots & 0 \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 \quad \dots\dots \quad 0 & 0 \dots\dots 0 & 0 \dots\dots 0 & \alpha_{11} & \dots\dots & \alpha_{1G} \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 \quad \dots\dots \quad 0 & 0 \dots\dots 0 & 0 \dots\dots 0 & \alpha_{G1} & \dots\dots & \alpha_{GG}
\end{vmatrix} = |\Lambda|^T \qquad [7]$$

En virtud de la hipótesis que hemos hecho, cuando hemos construído el modelo tendremos que la probabilidad elemental de

$$\{u_1(1) \dots\dots\dots u_G(T)\}$$

que designaremos por

$$\begin{aligned}
&\varphi\{u_1(1) \dots u_G(1), u_1(2) \dots u_G(2) \dots u_1(T) \dots \\
&\dots u_G(T)\}\, d\,u_1(1) \dots d\,u_G(T) = f\{u_1(1) \dots \\
&\dots u_G(1)\}\, f\{u_1(2) \dots u_G(2)\} \dots f\{u_1(T) \dots \\
&\qquad \dots u_G(T)\}\, d\,u_1(1) \dots d\,u_G(T) = \qquad [8]
\end{aligned}$$

$$= \prod_{t=1}^{T} f\{u_1(t) \dots u_G(t)\}\, d\,u_1(1) \dots d\,u_G(T) \qquad [9]$$

efectuando el cambio [6], obtendremos:

$$\prod_{t=1}^{T} f\{[\Lambda\, y(t) + \Gamma\, z(t)]^1\}\, \Lambda^T\, d\,y_1(1) \dots d\,y_G(T)\,. \qquad [10]$$

Pasemos ahora a definir el concepto de estructura y de estructura equivalente.

Definición de estructura.

Una estructura S consiste en la especificación total de las matrices Λ, Γ y la función de distribución de la variable G dimensional

$$\{u_1(t), \ldots, u_G(t)\}.$$

Definición de estructura equivalente.

Dos estructuras

$$S(\Lambda, \Gamma, f) \quad y \quad S^*(\Lambda^*, \Gamma^*, f^*)$$

son equivalentes, lo que se indica $S \sim S^*$ si

$$|\Lambda|^T \prod_{t=1}^{T} f\{[\Lambda\, y(t) + \Gamma\, z(t)]^1\} =$$

$$= |\Lambda^*|^T \prod_{t=1}^{T} f^*\{[\Lambda^*\, y(t) + \Gamma^*\, z(t)]^1\}.$$

Teorema.

Una condición necesaria y suficiente para la equivalencia de dos estructuras

$$S(\Lambda, \Gamma, f) \quad y \quad S^*(\Lambda^*, \Gamma^*, f^*)$$

es que están relacionadas por una transformación lineal no singular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Lambda^* &= Y\Lambda \\ \Gamma^* &= Y\Gamma \\ u^*(t) &= Y u(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Si hacemos la matriz $\{\Lambda\, \Gamma\} = A$, tendremos que las condiciones de equivalencia se pueden expresar así:

$$\begin{aligned} A^* &= YA \\ u^*(t) &= Y u(t). \end{aligned}$$

Con objeto de demostrar este teorema impondremos a las $u_i(t)$ la condición

$$\varepsilon \{u_i(t) \mid z(t)\} = 0$$

además de las ya impuestas en el modelo.

La condición es necesaria. Consideremos, pues, el sistema estructural [5]:

$$\Lambda\, y(t) + \Gamma\, z(t) = u(t)\,.$$

Premultiplicando por Λ^{-1}, tendremos:

$$\Lambda^{-1} \Lambda\, y(t) + \Lambda^{-1} \Gamma\, z(t) = \Lambda^{-1} u(t)$$

$$y(t) = -\Lambda^{-1} \Gamma\, z(t) + \Lambda^{-1} u(t) \qquad [12]$$

tomando esperanzas matemáticas,

$$\varepsilon \{y(t) \mid z(t)\} = -\Lambda^{-1} \Gamma\, z(t)\,.$$

Consideremos el sistema estructural equivalente

$$\Lambda^{*} y(t) + \Gamma^{*} z(t) = u^{*}(t)$$

haciendo lo mismo con este segundo sistema estructural

$$y(t) = -\Lambda^{*-1} \Gamma^{*} z(t) + \Lambda^{*-1} u^{*}(t) \qquad [13]$$

y tomando esperanzas matemáticas

$$\varepsilon \{y(t) \mid z(t)\} = -\Lambda^{*-1} \Gamma^{*} z(t)$$

con ambas esperanzas han de ser iguales por ser las estructuras equivalentes (las $y(t)$ tienen la misma distribución de Prob)

$$\Lambda^{-1} \Gamma = \Lambda^{*-1} \Gamma^{*}\,. \qquad [14]$$

Premultiplicando los dos miembros [14] por Λ^{*},

$$\Lambda^{*} \Lambda^{-1} \Gamma = \Gamma^{*} \qquad [15]$$

y haciendo

$$\Lambda^{*} \Lambda^{-1} = Y \qquad [16]$$

tendremos:

$$\Gamma^{*} = Y\, \Gamma\,. \qquad [17]$$

Tenemos que demostrar que es no singular. En efecto, Λ y Λ^* son no singulares; luego Λ^{-1} tampoco lo es, de donde deducimos que Y es no singular.

De [16] deducimos:

$$\Lambda^* = \mathrm{Y}\,\Lambda\,. \tag{18}$$

Para obtener la tercera fórmula de [11], tengamos en cuenta que

$$y(t) = -\Lambda^{-1}\,\Gamma\,z(t) + \Lambda^{-1}\,u(t)$$

sustituyendo $y(t)$ por su valor en [13], tendremos:

$$\begin{aligned} -\Lambda^{*-1}\,\Gamma^*\,z(t) + \Lambda^{*-1}\,u^*(t) &= \\ = -\Lambda^{-1}\,\Gamma\,z(t) + \Lambda^{-1}\,u(t) & \end{aligned} \tag{19}$$

premultiplicando los dos miembros de [19] por Λ^*, quedará:

$$\begin{aligned} -\Lambda^*\,\Lambda^{*-1}\,\Gamma^*\,z(t) + \Lambda^*\,\Lambda^{*-1}\,u^*(t) &= \\ = -\Lambda^*\,\Lambda^{-1}\,\Gamma\,z(t) + \Lambda^*\,\Lambda^{-1}\,u(t) & \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $\Lambda^*\,\Lambda^{*-1} = \mathrm{I}$, quedará:

$$-\Gamma^*\,z(t) + u^*(t) = \mathrm{Y}\,\Gamma\,z(t) + \mathrm{Y}\,u(t)$$

y en virtud de [17]:

$$u^*(t) = \mathrm{Y}\,u(t)\,. \tag{20}$$

Vamos a ver que la condición es suficiente. Sea S* una estructura deducida de la S por una transformación del tipo [11], en donde Y es una matriz de grado G no singular. Veamos que S y S* son equivalentes. En efecto, como

$$\mathrm{Y} = \Lambda^*\,\Lambda^{-1}\,;$$

Λ^* es no singular; por otra parte,

$$u^*(t) = \mathrm{Y}\,u(t) = \Lambda^*\,\Lambda^{-1}\,u(t)$$

premultiplicando esta expresión por Λ^{*-1}, quedará:

$$\Lambda^{*-1}\,u^*(t) = \Lambda^{-1}\,u(t)$$

de aquí deducimos que $y(t)$ en [12] y [13] tienen la misma distribución condicional para cualquier conjunto de variables predeterminadas (exógenas y endógenas desplazadas) y función de distribución de las

$$\{u_1(t), \ldots, u_G(t)\}.$$

Vamos a ver lo que la transformación [11] significa en la matriz de las covarianzas.

Para ello llamemos a

$$\varepsilon\{u_i(t)\, u_h(t)\} = \mu_{ih}$$

la matriz de las covarianzas, que llamaremos M, será:

$$M = \begin{Vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots\cdots & \mu_{1G} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots\cdots & \mu_{2G} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{G1} & \mu_{G2} & \cdots\cdots & \mu_{GG} \end{Vmatrix} \qquad [21]$$

consideremos una estructura equivalente, en donde $u^*(t) = \Upsilon u(t)$

$$\text{sea} \begin{Vmatrix} u^*_1(t) \\ u^*_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^*_G(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots\cdots & g_{1G} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots\cdots & g_{2G} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{G1} & g_{G2} & \cdots\cdots & g_{GG} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_G(t) \end{Vmatrix} \qquad [22]$$

Vamos a calcular

$$\varepsilon\{u^*_i(t)\, u^*_h(t)\} = \mu^*_{ih}$$

de [22], deducimos:

$$\varepsilon\{u^*_i\, u^*_h\} = \varepsilon\,\{(g_{i1} u_1 + g_{i2} u_2 + \ldots + g_{iG} u_G)(g_{h1} u_1 + g_{h2} u_2 + \ldots + g_{hG} u_G)\} =$$

$$= \sum_{S=1}^{G} \sum_{k=1}^{G} g_{ij}\, g_{hk}\, \mu_{jk}\,.$$

Ahora bien, esta expresión no es más que el término $(i\,h)$ del siguiente producto de matrices:

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots\cdots & g_{1G} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots\cdots & g_{2G} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{G1} & g_{G2} & \cdots\cdots & g_{GG} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots\cdots & \mu_{1G} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots\cdots & \mu_{2G} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{G1} & \mu_{G2} & \cdots\cdots & \mu_{GG} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots\cdots & g_{G1} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots\cdots & g_{G2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1G} & g_{2G} & \cdots\cdots & g_{GG} \end{Vmatrix}$$

Para ello vemos que, en el producto de las dos primeras matrices, la fila i viene dada por la expresión

$$g_{i1}\,\mu_{11} + g_{i2}\,\mu_{21} + \text{—}\, g_{iG}\,\mu_{G1}, \ldots\ldots, g_{i1}\,\mu_{1G} + g_{i2}\,\mu_{2G} + \text{—} + g_{iG}\,\mu_{GG}$$

al multiplicar la fila i por la columna h de la tercera matriz, tendremos el término $(i\,h)$, que será:

$$(g_{i1}\,\mu_{11} + g_{i2}\,\mu_{21} + \cdots + g_{1G}\,\mu_{1G})\,g_{h1} + \ldots\ldots + (g_{i1}\,\mu_{1G} + \\ + g_{i2}\,\mu_{2G} + \cdots + g_{iG}\,\mu_{GG})\,g_{hG} = \\ = \sum_{s=1}^{G}\ \sum_{k=1}^{G} g_{ij}\,g_{hk}\,\mu_{jk} = \mu^{*}_{ik}\,.$$

Llamando, pues, a la matriz de las covarianzas de las

$$\{u^{*}_{1}(t)\ \ldots\ldots\ u^{*}_{G}(t)\}\,;\ M^{*}$$

tendremos:

$$M^{*} = Y\ M\ Y^{1}\,.$$

Una vez visto lo anterior, consideramos un espacio paramétrico del que son puntos $[\Lambda, \Gamma, M]$. Dos puntos $[\Lambda^{*}, \Gamma^{*}, M^{*}]$ y $[\Lambda^{1}\ \Gamma^{1}\ M^{1}]$ del espacio paramétrico se dice que son equivalentes, desde el punto de vista de las observaciones, si forman dos estructuras equivalentes.

Se dice que una transformación es trivial respecto una ecuación estructural i, si se reduce a un cambio de escala; así, supongamos que en la estructura S la ecuación i es

$$\alpha_{i1}\,y_{1}(t) + \alpha_{i2}\,y_{2}(t) + \ldots + \alpha_{iG}\,y_{G}(t) + \\ + \gamma_{i1}\,z_{1}(t) + \ldots + \gamma_{ik}\,z_{k}(t) = u_{i}(t)$$

en la estructura S^* la ecuación i será:

$$\alpha^*_{i1} y_1(t) + \alpha^*_{i2} y_2(t) + \ldots + \alpha^*_{iG} y_G(t) +$$
$$+ \gamma^*_{i1} z_1(t) + \ldots + \gamma^*_{ik} z_k(t) = u^*_i(t)$$

para que la estructura sea equivalente y la transformación trivial

$$\alpha^*_{ih} = g_{ii}\, \alpha_{ih} \qquad \gamma^*_{ih} = g_{ii}\, \gamma_{ih}$$
$$\mu^*_{ii} = g^2_{ii}\, \mu_{ii} \qquad \mu^*_{ih} = g_{ii} \sum g_{hk}\, \mu_{hk}\,.$$

Se llama espacio paramétrico restringido al conjunto de puntos del espacio paramétrico que satisfacen ciertas condiciones.

Definición de identificabilidad.

Se dice que la ecuación i es identificable con ciertas condiciones impuestas previamente a los puntos (Λ, Γ, M). Si cada punto de espacio restringido se obtiene del (Λ, Γ, M) por una transformación trivial.

Un sistema de ecuaciones estructurales se dice que es identificable, bajo un conjunto de condiciones dadas previamente, si lo es cada una de las ecuaciones estructurales.

Identificación de ecuaciones estructurales en el caso de restricciones lineales.

Decimos que hemos impuesto restricciones lineales a los coeficientes de las ecuaciones estructurales, cuando han de satisfacer ciertas relaciones de este tipo.

Las más sencillas restricciones lineales que se pueden imponer son del tipo

$$\alpha_{ij} = 0 \qquad \text{o} \qquad \gamma_{ih} = 0$$

que nos indican que en la ecuación $i\, y_j(t)$ no debe aparecer así, como tampoco $z_h(t)$.

Restricciones de un tipo más general, de las que las anteriores serían un caso particular, las podríamos establecer de la siguiente forma, para los parámetros de la ecuación i:

$$\sum l_j \;\; \alpha_{ij} + \sum m_h \;\; \gamma_{ih} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum l^{p)}_j\, \alpha_{ij} + \sum m^{p)}_h\, \gamma_{ih} = 0$$

Condición necesaria y suficiente de identificabilidad para una ecuación estructural.

a) **Comencemos considerando el caso en que las restricciones son del tipo**

$$\alpha_{ij} = 0 \qquad \gamma_{ih} = 0 .$$

Consideremos un sistema análogo al [5] y llamemos a la matriz de sus coeficientes A, es decir:

$$\mathrm{A} = \{\Lambda\ \Gamma\} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} \ldots\ldots \alpha_{1G} & \gamma_{11} \ldots\ldots \gamma_{1k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{G1} \ldots\ldots \alpha_{GG} & \gamma_{G1} \ldots\ldots \gamma_{Gk} \end{matrix} \right\|$$

Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación *i*-ésima sea identificable, es que la matriz $A^{(i)}$ obtenida de la A suprimiendo la fila *i*-ésima y las columnas en las que las

$$\alpha_{ij} \neq 0 \qquad \gamma_{ih} \neq 0 ,$$

sea de rango G — 1.

Vamos a demostrar el teorema en un caso particular. Consideremos el siguiente modelo lineal:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3 + \gamma_{11} z_1 &= u_1 \\ \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3 + \gamma_{21} z_1 &= u_2 \\ \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + \alpha_{33} y_3 + \gamma_{31} z_1 &= u_3 . \end{aligned}$$

Supongamos que a la ecuación segunda la imponemos la restricción lineal

$$\alpha_{22} = 0 \qquad \gamma_{21} = 0 .$$

Consideremos una transformación lineal.

$$\gamma = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{matrix} \right\|$$

Los parámetros de una estructura equivalente, serán:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* & \alpha_{13}^* & \gamma_{11}^* \\ \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* & \alpha_{23}^* & \gamma_{21}^* \\ \alpha_{31}^* & \alpha_{32}^* & \alpha_{33}^* & \gamma_{33}^* \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \gamma_{11} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \gamma_{21} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \gamma_{31} \end{matrix} \right\|$$

para preservar la restricción

$$\alpha_{22}^* = 0 \qquad \gamma_{21}^* = 0$$

deberá ocurrir

$$\begin{aligned} \alpha_{22}^* &= g_{21}\,\alpha_{12} + g_{22}\,\alpha_{22} + g_{23}\,\alpha_{32} = 0 \\ \gamma_{21}^* &= g_{21}\,\gamma_{11} + g_{22}\,\gamma_{21} + g_{23}\,\gamma_{31} = 0 \end{aligned}$$

ahora bien, $\alpha_{22} = \gamma_{21} = 0$, luego

$$\begin{aligned} g_{21}\,\alpha_{12} + g_{23}\,\alpha_{32} = 0 \\ g_{21}\,\gamma_{11} + g_{23}\,\gamma_{31} = 0 \end{aligned} \qquad [23]$$

teniendo en cuenta que la matriz del sistema

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{12} & \alpha_{32} \\ \gamma_{11} & \gamma_{31} \end{matrix} \right\| \qquad \text{y} \qquad A^{(2)} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{12} & \gamma_{11} \\ \alpha_{32} & \gamma_{31} \end{matrix} \right\|$$

tienen el mismo rango, vemos que si esta matriz es de rango $3 - 1 = 2$, es decir,

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{12} & \gamma_{11} \\ \alpha_{32} & \gamma_{31} \end{matrix} \right\| \neq 0$$

entonces [23] admite la solución única $g_{21} = g_{23} = 0$, con lo que

$$\begin{aligned} \alpha_{21}^* = g_{22}\,\alpha_{21};\ \alpha_{22}^* = g_{22}\,\alpha_{22} = g_{22}\cdot 0 = 0;\ \alpha_{23}^* = g_{22}\,\alpha_{23};\ \gamma_{21}^* = \\ = g_{22}\,\gamma_{21} = g_{22}\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

de donde deducimos que la transformación es trivial, con lo que hemos demostrado que la condición es suficiente.

Para ver que la condición es necesaria, supongamos que la ecuación 2.ª es identificable; las únicas transformaciones lineales no singulares γ, que satisfacen las restricciones, son aquellas que hacen

$$
\begin{aligned}
g_{21}\,\alpha_{12} + g_{23}\,\alpha_{32} &= 0 \\
g_{21}\,\alpha_{11} + g_{23}\,\alpha_{31} &= 0
\end{aligned}
\qquad [24]
$$

Supongamos que

$$
A^{(2)} = \begin{Vmatrix} \alpha_{12} & \gamma_{11} \\ \alpha_{32} & \gamma_{31} \end{Vmatrix}
$$

tiene el rango 1; entonces [24] admitirá dos soluciones, una de las cuales puede ser $g_{21} = 0$, $g_{23} = 0$, g_{22}, y otra g_{21}^*, g_{22}^*, g_{23}^*; la solución general del sistema [24] será del tipo

$$
(\lambda_1\, 0 + \lambda_2\, g_{21}^*) \quad \lambda_1\, g_{22} + \lambda_2\, g_{22}^* \quad \lambda_1\, 0 + \lambda_2\, g_{23}^*
$$

ahora bien, para que esta transformación haga identificable la ecuación deberá ocurrir

$$
\begin{aligned}
\alpha_{21}^* &= \lambda_2\, g_{21}^*\, \alpha_{11} + (\lambda_1\, g_{22} + \lambda_2\, g_{22}^*)\, \alpha_{21} + \lambda_2\, g_{23}^*\, \alpha_{31} = k\,\alpha_{21} \\
\alpha_{32}^* &= \lambda_2\, g_{21}^*\, \alpha_{13} + (\lambda_1\, g_{22} + \lambda_2\, g_{22}^*)\, \alpha_{33} + \lambda_2\, g_{23}^*\, \alpha_{33} = k\,\alpha_{23}
\end{aligned}
$$

para que esto ocurra es necesaria que $\lambda_2 = 0$, en cuyo caso no puede ser de rango 1 la matriz $A^{(2)}$.

Como corolario se puede establecer el siguiente criterio de identificación. Una condición necesaria para la identificación de ecuación estructural i en el caso de restricciones simples, es que el número de restricciones en los coeficientes de esta ecuación sea por lo menos igual al de ecuaciones menos una.

Vamos a continuación a abordar el problema de la identificación en el caso de restricciones lineales más generales. Como en el caso anterior, vamos a razonar con $G = 3$, y después enunciaremos el teorema en forma general.

Consideremos el sistema.

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11}\, y_1 + \alpha_{12}\, y_2 + \alpha_{13}\, y_3 + \gamma_{11}\, z_1 + \gamma_{12}\, z_2 + \gamma_{13}\, z_3 &= u_1 \\
\alpha_{21}\, y_1 + \alpha_{22}\, y_2 + \alpha_{23}\, y_3 + \gamma_{21}\, z_1 + \gamma_{22}\, z_2 + \gamma_{23}\, z_3 &= u_2 \\
\alpha_{31}\, y_1 + \alpha_{32}\, y_2 + \alpha_{33}\, y_3 + \gamma_{31}\, z_1 + \gamma_{32}\, z_2 + \gamma_{33}\, z_3 &= u_3
\end{aligned}
\qquad [25]
$$

Supongamos que a los parámetros que intervienen en la segunda ecuación se les somete a las siguientes restricciones:

$$
\begin{aligned}
&0\,\alpha_{21} + 0\,\alpha_{22} + \chi_1\ \alpha_{23} + \psi_1\ \gamma_{21} + \psi_2\ \gamma_{22} + \psi_3\ \gamma_{23} = 0\\
&0\,\alpha_{21} + 0\,\alpha_{22} + \chi^1{}_1\,\alpha_{23} + \psi^1{}_1\,\gamma_{21} + \psi^1{}_2\,\gamma_{22} + \psi^1{}_3\,\gamma_{23} = 0
\end{aligned} \qquad [26]
$$

en forma matricial, estas restricciones se pueden expresar de la siguiente forma:

$$
\| \alpha_{21}\ \alpha_{22}\ \alpha_{23}\ \ \gamma_{21}\ \gamma_{22}\ \gamma_{23} \| \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \chi_1 & \chi^1{}_1 \\ \psi_1 & \psi^1{}_1 \\ \psi_2 & \psi^1{}_2 \\ \psi_3 & \psi^1{}_3 \end{matrix} \right\| = \| 0,\ 0 \| \qquad [27]
$$

o

$$
\| \alpha_{21}\ \alpha_{22}\ \alpha_{23}\ \ \gamma_{21}\ \gamma_{22}\ \gamma_{23} \|\ \ \mathrm{R} = \| 0, 0 \| .
$$

Consideremos una transformación no singular:

$$
\mathrm{Y} = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{matrix} \right\|
$$

tal que

$$
\mathrm{A}^* = \mathrm{Y} \| \Lambda, \Gamma \|
$$

esta transformación ha de ser tal, que preserve las restricciones [27], o sea:

$$
\| \alpha^*{}_{21}\ \ \alpha^*{}_{22}\ \ \alpha^*{}_{23}\ \ \gamma^*{}_{21}\ \ \gamma^*{}_{22}\ \ \gamma^*{}_{23} \| \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \chi_1 & \chi^1{}_2 \\ \psi_1 & \psi^1{}_1 \\ \psi_2 & \psi^1{}_2 \\ \psi_3 & \psi^1{}_3 \end{matrix} \right\| = \| 0, 0 \|
$$

ahora bien:

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* & \alpha_{13}^* & \gamma_{11}^* & \gamma_{12}^* & \gamma_{13}^* \\ \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* & \alpha_{23}^* & \gamma_{21}^* & \gamma_{22}^* & \gamma_{23}^* \\ \alpha_{31}^* & \alpha_{32}^* & \alpha_{33}^* & \gamma_{31}^* & \gamma_{32}^* & \gamma_{33}^* \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{matrix}\right\| \cdot$$

$$\cdot \left\|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{matrix}\right\|$$

según [28], deberá ocurrir:

$$[\alpha_{21}^* \ \alpha_{22}^* \ \alpha_{23}^* \ \gamma_{21}^* \ \gamma_{22}^* \ \gamma_{23}^*] = [g_{21} \ g_{22} \ g_{23}] \ \mathbf{A}$$

$$\| \alpha^*_{21} \ \alpha^*_{22} \ \alpha^*_{23} \ \ \gamma^*_{21} \ \gamma^*_{22} \ \gamma^*_{23} \| \left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \chi_1 & \chi^1_1 \\ \phi_1 & \phi^1_1 \\ \phi_2 & \phi^1_2 \\ \phi_3 & \phi^1_3 \end{matrix}\right\| = \| g_{21} \ g_{22} \ g_{23} \| \ \mathbf{A} \, .$$

$$\cdot \left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \chi_1 & \chi^1_1 \\ \phi_1 & \phi^1_1 \\ \phi_2 & \phi^1_2 \\ \phi_3 & \phi^1_3 \end{matrix}\right\| = \| g_{21} \ g_{22} \ g_{23} \|$$

$$\left\|\begin{matrix} \chi_1 \alpha_{13} + \phi_1 \gamma_{11} + \phi_2 \gamma_{12} + \phi_3 \gamma_{13} & \chi^1_1 \alpha_{13} + \phi^1_1 \gamma_{11} + \phi^1_2 \gamma_{12} + \phi^1_3 \gamma_{13} \\ \chi_1 \alpha_{23} + \phi_1 \gamma_{21} + \phi_2 \gamma_{22} + \phi_3 \gamma_{23} & \chi^1_1 \alpha_{23} + \phi^1_1 \gamma_{21} + \phi^1_2 \gamma_{22} + \phi^1_3 \gamma_{23} \\ \chi_1 \alpha_{33} + \phi_1 \gamma_{31} + \phi_2 \gamma_{32} + \phi_3 \gamma_{33} & \chi^1_1 \alpha_{33} + \phi^1_1 \gamma_{31} + \phi^1_2 \gamma_{32} + \phi^1_3 \gamma_{33} \end{matrix}\right\|$$

teniendo en cuenta [26], quedará:

$$\| g_{21} \ g_{22} \ g_{23} \|$$

$$\left\|\begin{matrix} \chi_1 \alpha_{13} + \phi_1 \gamma_{11} + \phi_2 \gamma_{12} + \phi_3 \gamma_{13} & \chi^1_1 \alpha_{13} + \phi^1_1 \gamma_{11} + \phi^1_2 \gamma_{12} + \phi^1_3 \gamma_{13} \\ \chi_1 \alpha_{33} + \phi_1 \gamma_{31} + \phi_2 \gamma_{32} + \phi_3 \gamma_{33} & \chi^1_1 \alpha_{33} + \phi^1_1 \gamma_{31} + \phi^1_2 \gamma_{32} + \phi^1_3 \gamma_{33} \end{matrix}\right\|$$

realizada la operación, deberá ocurrir que

$$g_{21}(\chi_1 \alpha_{13} + \psi_1 \gamma_{11} + \psi_2 \gamma_{12} + \psi_3 \gamma_{13}) +$$
$$+ g_{23}(\chi_1 \alpha_{33} + \psi_1 \gamma_{31} + \psi_2 \gamma_{32} + \psi_3 \gamma_{33}) = 0$$

$$g_{21}(\chi^1{}_1 \alpha_{13} + \psi^1{}_1 \gamma_{11} + \psi^1{}_2 \gamma_{12} + \psi^1{}_3 \gamma_{13}) +$$
$$+ g_{23}(\chi^1{}_1 \alpha_{33} + \psi^1{}_1 \gamma_{31} + \psi_2 \gamma_{32} + \psi_3 \gamma_{33}) = 0$$

para que la transformación sea trivial es suficiente, pues, que

$$g_{21} = g_{23} = 0$$

o sea, que

$$\left\| \begin{matrix} \chi_1 \alpha_{13} + \psi_1 \gamma_{11} + \psi_2 \gamma_{12} + \psi_3 \gamma_{13}; & \chi_1 \alpha_{33} + \psi_1 \gamma_{31} + \psi_2 \gamma_{32} + \psi_3 \gamma_{33} \\ \chi^1{}_1 \alpha_{13} + \psi^1{}_1 \gamma_{11} + \psi^1{}_2 \gamma_{12} + \psi^1{}_3 \gamma_{13}; & \chi^1{}_1 \alpha_{33} + \psi^1{}_1 \gamma_{31} + \psi^1{}_2 \gamma_{32} + \psi^1{}_3 \gamma_{33} \end{matrix} \right\| \neq 0$$

pero esto es lo mismo que decir que la matriz

$$A \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \chi_1 & \chi^1{}_1 \\ \psi_1 & \psi^1{}_1 \\ \psi_2 & \psi^1{}_2 \\ \psi_3 & \psi^1{}_3 \end{matrix} \right\|$$

tiene rango 2.

Que la condición es necesaria se demuestra de forma análoga al caso de restricciones simples. Podemos, pues, enunciar el siguiente teorema:

Dado un sistema estructural de G ecuaciones; para que la ecuación *i*-ésima sea identificable cuando sus coeficientes se someten a las restricciones lineales,

$$\{\alpha_{i1}\, \alpha_{i2} \ldots \alpha_{iG}\, \gamma_{iG}\, \gamma_{11} \cdots \gamma_{ik}\}\, R = 0$$

es condición suficiente y necesaria que $A \, . \, R$ sea el rango $G - 1$.

Como corolario podemos establecer la siguiente condición, necesaria para que la ecuación *i*-ésima sea identificable. Una condición necesaria para que la *i*-ésima ecuación estructural sea identificable, es que el número de restricciones independientes *a priori* expresadas por R sea por lo menos G — 1.

Algunos problemas que se plantean en la estimación de parámetros.

Al principio de este trabajo habíamos dicho que uno de los problemas principales que se plantean en el tratamiento de los modelos econométricos, era el de la estimación de parámetros que intervienen en un modelo econométrico.

Vamos, en esta segunda parte, a ver si es lícito aplicar el método de los mínimos cuadrados a un sistema de ecuaciones estructurales. Para ello vamos a razonar con un ejemplo sencillo, pero que nos dará una idea clara de por qué no da resultados apetecibles el uso de este método.

Consideremos el siguiente sistema estructural:

$$\begin{aligned} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \gamma_{11} z_1 + \varepsilon_1 &= u_1 \\ \alpha_{21} y_1 + y_2 + \gamma_{22} z_2 + \varepsilon_2 &= u_2 \end{aligned} \qquad [29]$$

Supongamos que por el método de los mínimos cuadrados queremos estimar los parámetros de la ecuación.

$$y_1 + \alpha_{12} y_2 + \gamma_{11} z_1 + \varepsilon_1 = u_1 \qquad [30]$$

a partir de un conjunto de observaciones

$$\{y_1(1), y_2(1), z_1(1), z_2(1)\} \ldots \{y_1(\mathrm{T}) \ldots z_2(\mathrm{T})\}$$

además $y_1(t)$ e $y_2(t)$ deben de satisfacer la ecuación

$$\alpha_{21} y_1 + y_2 + \gamma_{22} z_2 + \varepsilon_2 = u_2\,. \qquad [31]$$

Las variables

$$y_1(t), y_2(t), z_1(t), z_2(t)$$

se pueden observar, mientras que las variables $u_1(t), u_2(t)$ no se pueden observar y son aleatorias, con las siguientes condiciones:

$$\varepsilon\{u_1(t)\} = 0 \qquad \varepsilon\{u^2{}_1(t)\} = \mu_{11}$$

$$\varepsilon\{u_1(t)\, u_2(t)\} = \mu_{12}$$

$$\varepsilon\{u_2(t)\} = 0 \qquad \varepsilon\{u^2{}_2(t)\} = \mu_{22}$$

La distribución conjunta de $u_1\, u_2$ es normal bidimensional. Supondremos que y_1 e y_2 son variables endógenas y z_1, z_2 exógenas.

Consideremos el plano

$$y_1 + \alpha_{12}\, y_2 + \gamma_{11}\, z_1 + \varepsilon_1 = 0 \qquad [32]$$

como el que expresa la verdadera relación existente: y_1, y_2, z_1; cuando se hace abstracción de las perturbaciones, los puntos observados

$$\{y_1(t),\ y_2(t),\ z_1(t)\}$$

pueden considerarse como una aproximación del punto

$$\{\overline{y}_1(t),\ \overline{y}_2(t),\ z_1(t)\}$$

que se encuentra en el plano.

Es necesario que nos ocupemos con más detenimiento de lo que entendemos por punto verdadero; este punto es el que obtendríamos de [29] si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ fuesen cero, para valores observados de $z_1(t)$ y $z_2(t)$. El motivo de que $z_1(t)$ y $z_2(t)$ tengan el mismo valor para el punto observado que para el verdadero, reside en el hecho de que son variables exógenas y se forman con independencia de $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Podemos, pues, decir que el punto observado

$$y_1(t),\, y_2(t),\, z_1(t)$$

se forma a partir del punto verdadero

$$\overline{y}_1(t),\, \overline{y}_2(t),\, z_1(t)$$

cuando se tienen en cuenta los efectos de $u_1(t)$ y $u_2(t)$.

Comencemos examinando el efecto de $u_1(t)$; este efecto habrá de distribuirse entre $\{y_1(t),\ y_2(t)\}$, de acuerdo con [29]; es inmediato pensar entonces que, al igual que hemos hecho $z_1(t)$ independiente de $u_1(t)$, sería conveniente hacer $y_2(t)$ independiente también. Sin embargo, esta suposición es incorrecta, ya que $y_1(t)$, $y_2(t)$ deben de satisfacer [29] para valores dados de $z_1(t)$ y $z_2(t)$; para un valor dado de $z_2(t)$ en [31], tendremos:

$$\alpha_{21} y_1(t) = -y_2(t) + u_2(t) - \gamma_{22} z_2$$

o sea:

$$y_1(t) = \frac{1}{\alpha_{21}} \{-y_2(t) + u_2(t) - \gamma_{22} z_2\}$$

ahora bien, este valor de [31], sustituído en [30], nos dice que $y_2(t)$ depende de $u_1(t)$, salvo en el caso de que $u_1(t) = \beta u_2(t)$, para lo cual tiene que ser singular la distribución normal bidimensional.

Así, pues, el efecto de $u_1(t)$ no se puede suponer que actúe sobre $y_1(t)$, sino sobre $y_1(t)$ e $y_2(t)$; es decir, el que el punto observado no caiga en el plano [32], es debido a desviaciones de $y_1(t)$ e $y_2(t)$; respecto $\bar{y}_1(t)$ e $\bar{y}_2(t)$, parece difícil pensar que se pueden obtener estimaciones insesgadas, haciendo mínima la suma de los cuadrados de los residuos en la dirección del eje de las y_1, mientras despreciamos la suma de los mismos en la dirección y_2.

Al no poder, pues, en general, aplicar a los sistemas estructurales directamente el método de los mínimos cuadrados, parece natural proceder de la siguiente forma: despejar en el sistema estructural las variables endógenas, con lo que nos quedará un sistema estructural del tipo [12], y a cada ecuación de este sistema aplicarle el método de los mínimos cuadrados.

Dos problemas se nos plantean inmediatamente: *a*) ¿Qué condiciones deben cumplirse para conocer exactamente los coeficientes de las ecuaciones estructurales cuando se conocen los coeficientes de las ecuaciones en forma reducida? *b*) ¿Las estimaciones de los parámetros en las ecuaciones en forma reducida nos dan estimaciones correctas de los parámetros de las ecuaciones estructurales?

Pasemos a contestar la primera pregunta. Para ello, consideramos el sistema [12]:

$$y(t) = \Lambda^{-1}\Gamma z(t) + \Lambda^{-1} u(t)$$

para mayor sencillez del sistema, vamos a expresarlo así:

$$y(t) = \Pi z(t) + \nu(t) \qquad [33]$$

en donde

$$\Pi = -\Lambda^{-1}\Gamma \qquad [34]$$

$$\nu(t) = \Lambda^{-1} u(t) \qquad [35]$$

o sea:

$$\Pi = \left\| \begin{matrix} \frac{|\Lambda_{11}|}{|\Lambda|} & \frac{|\Lambda_{21}|}{|\Lambda|} & \cdots\cdots & \frac{|\Lambda_{G1}|}{|\Lambda|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{|\Lambda_{1G}|}{|\Lambda|} & \frac{|\Lambda_{2G}|}{|\Lambda|} & \cdots\cdots & \frac{|\Lambda_{GG}|}{|\Lambda|} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots\cdots & \gamma_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \cdots\cdots & \gamma_{Gk} \end{matrix} \right\| \qquad [36]$$

siendo $|\Lambda_{ih}|$ el adjunto de α_{ih} en $|\Lambda|$.

Por otra parte,

$$\nu(t) = \left\| \begin{matrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_G(t) \end{matrix} \right\| = + \Lambda^{-1} u(t) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \frac{|\Lambda_{11}|}{|\Lambda|} & \cdots\cdots & \frac{|\Lambda_{1G}|}{|\Lambda|} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{|\Lambda_{1G}|}{|\Lambda|} & \cdots\cdots & \frac{|\Lambda_{GG}|}{|\Lambda|} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} u_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_G(t) \end{matrix} \right\| \qquad [37]$$

Volvamos de nuevo al sistema [4], y fijándonos en la primera ecuación

$$\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \dots + \alpha_{1G} y_G + \gamma_{11} z_1 + \dots + \gamma_{1k} z_k = u_1$$

expresémosla en forma matricial de la siguiente forma:

$$\alpha_1 y_1 + \gamma_1 z_1 = u_1 \qquad [38]$$

siendo

$$\alpha_1 = \{\alpha_{11}\ \alpha_{12} \dots \alpha_{1G}\} \qquad \gamma_1 = \{\gamma_{11}\ \gamma_{12} \dots \gamma_{1k}\}\,.$$

Supongamos que a los coeficientes de esta ecuación les hemos sometido a restricciones simples, de forma que en α_1 hay G^* elementos que no son cero, y G^{**} que lo son. De forma análoga en γ_1 hay k^* elementos que no son ceros y k^{**} que lo son; así, pues, tendremos:

$$\begin{aligned} G^* + G^{**} &= G \\ k^* + k^{**} &= k\,. \end{aligned}$$

Suponiendo que los elementos que no son cero son los primeros de cada matriz, con lo cual no hay ningún pérdida de generalidad, tendremos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \{\alpha_{11}\ \alpha_{12} \dots \alpha_{1G^*} \quad \overbrace{0,\ 0\ \dots\dots\ 0}^{G^{**}}\} \\ \gamma_1 &= \{\gamma_{11}\ \gamma_{12} \dots \gamma_{1k^*} \quad \overbrace{0,\ 0\ \dots\dots\ 0}^{k^{**}}\} \end{aligned}$$

que podríamos expresar así:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \{\alpha_{1G^*}\ \alpha_{1G^{**}}\} \\ \gamma_1 &= \{\gamma_{1k^*}\ \gamma_{1k^{**}}\} \end{aligned} \qquad [39]$$

en donde

$$\begin{aligned} \alpha_{1G^{**}} &= \{ \overbrace{0,\ 0\ \dots\dots\ 0}^{G^{**}}\} \qquad & \alpha_{1G^*} &= \{\alpha_{11} \dots \alpha_{1G^*}\} \\ \gamma_{1k^{**}} &= \{ \overbrace{0,\ 0\ \dots\dots\ 0}^{k^{**}}\} \qquad & \alpha_{1k^*} &= \{\gamma_{11} \dots \gamma_{1k^*}\} \end{aligned} \qquad [40]$$

De forma análoga, a la matriz de las variables que aparecen multiplicando a $\alpha_{11} \ldots \alpha_{1G*}$, o sea, $\alpha_1 \{y_1 \ldots y_{G*}\}$, las designaremos por y_*, y a la matriz de las restantes por y_{**}; la misma notación empleada en las z nos llevará a la consideración de dos matrices:

$$z_k = \{z_1\, z_2 \ldots z_{k*}\} \qquad \text{y} \qquad z_{**} = \{z_{h*+1} \ldots z_k\}\,.$$

Veamos ahora una propiedad que tiene el sistema estructural escrito en forma reducida: La ecuación estructural [38] se obtiene del sistema estructural [12], premultiplicándolo por α_1. En efecto, [12] vendrá expresado

$$y(t) = -\Lambda^{-1}\Gamma z(t) + \Lambda^{-1} u(t)$$

premultiplicándolo por α_1, tendremos:

$$\alpha_1\, y(t) = \alpha_1\, \Lambda^{-1}\Gamma z(t) + \alpha_1\, \Lambda^{-1} u(t)$$

que desarrollado, dará:

$$\alpha_1\, y(t) = -\, \| \alpha_{11}\, \alpha_{12} \ldots \alpha_{1G} \| \left\| \begin{matrix} \dfrac{|\Lambda_{11}|}{|\Lambda|} & \cdots\cdots & \dfrac{|\Lambda_{G1}|}{|\Lambda|} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{|\Lambda_{1G}|}{|\Lambda|} & \cdots\cdots & \dfrac{|\Lambda_{GG}|}{|\Lambda|} \end{matrix} \right\| \,.$$

$$.\; \Gamma z(t) + \alpha_1\, \Lambda^{-1} u(t) \qquad [41]$$

ahora bien:

$$\| \alpha_{11}\, \alpha_{12} \ldots \alpha_{1G} \| \left\| \begin{matrix} \dfrac{|\Lambda_{11}|}{|\Lambda|} & \cdots\cdots & \dfrac{|\Lambda_{G1}|}{|\Lambda|} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{|\Lambda_{1G}|}{|\Lambda|} & \cdots\cdots & \dfrac{|\Lambda_{GG}|}{|\Lambda|} \end{matrix} \right\| = \| 1, 0 \ldots 0 \|$$

ya que el primer elemento de esta matriz es $\dfrac{|\Lambda|}{|\Lambda|}$ y los demás son cero, por ser la suma de los elementos de una fila por los adjuntos de una paralela a ella [41]; se convertirá, pues, en

$$\alpha_1 y(t) = -\{1, 0 \dots 0\} \Gamma z(t) + \{1, 0 \dots 0\} u(t) =$$

$$\alpha_1 y(t) = -\{\gamma_{11} \gamma_{12} \dots \gamma_{1k}\} z(t) + u_1(t) = -\gamma_1 z(t) + u_1(t)$$

o sea:

$$\alpha_1 y(t) + \gamma_1 z(t) + u_1(t) = 0$$

ecuación que coincide con la [38].

Consideremos el sistema estructural en la forma [33], en donde Π, que es una matriz de G filas y k columnas, particionadas de las siguientes formas:

$$\Pi = \begin{Bmatrix} \Pi_{G^*} \\ \Pi_{G^{**}} \end{Bmatrix} = \{\Pi_{k^*} \, \Pi_{k^{**}}\} = \begin{Bmatrix} \Pi_{G^* k^*} & \Pi_{G^{**} k^{**}} \\ \Pi_{G^{**} k^*} & \Pi_{G^{**} k^{**}} \end{Bmatrix}$$

en donde

Π_{G^*} es una matriz de G* filas y k columnas
$\Pi_{G^{**}}$ es una matriz de G* filas y k columnas
Π_{k^*} es una matriz de k^* columnas y G filas
$\Pi_{k^{**}}$ es una matriz de k^{**} columnas y G filas
$\Pi_{G^* k^*}$ es una matriz de G* filas y k^* columnas
$\Pi_{G^* k^{**}}$ es una matriz de G* filas y k^{**} columnas
$\Pi_{G^{**} k^*}$ es una matriz de G** filas y k^* columnas
$\Pi_{G^{**} k^{**}}$ es una matriz de G** filas y k^{**} columnas.

Mas teniendo en cuenta la propiedad anterior, podremos poner:

$$\alpha_1 y(t) = \alpha_1 \begin{Bmatrix} \Pi_{G^* k^*} & \Pi_{G^* k^{**}} \\ \Pi_{G^{**} k^*} & \Pi_{G^{**} k^{**}} \end{Bmatrix} z(t) + u_1(t)$$

que podremos descomponer de la siguiente forma:

$$\alpha_1 y(t) = \{\alpha_{1G^*} \, \alpha_{1G^{**}}\} \begin{Bmatrix} \Pi_{G^* k^*} & \Pi_{G^* k^{**}} \\ \Pi_{G^{**} k^*} & \Pi_{G^{**} k^{**}} \end{Bmatrix} z(t) + u_1(t)$$

que se convertirá en

$$\alpha_1 y(t) = \{\alpha_{1G^*} \Pi_{G^* k^*} \qquad \alpha_{1G^*} \Pi_{G^* k^{**}}\} z(t) + u_1(t)$$

expresión que nos indica que

$$\begin{aligned} \alpha_{1G^*}\Pi_{G^*K^*} &= \gamma_{K^*} \\ \alpha_{1G^*}\Pi_{G^*K^{**}} &= 0 \end{aligned} \qquad [42]$$

estas dos ecuaciones nos dicen todo lo que se puede saber de los coeficientes estructurales conocidos los reducidos.

De aquí deducimos que los coeficientes estructurales α_{1G^*} γ_{1K^*} se podrán hallar si la ecuación (2.ª) de [41] normalizada, da una solución única para α_{1G^*} y γ_{1K^*}. Vamos, pues, a ver qué condiciones debe de cumplir

$$\alpha_{1G^*}\Pi_{G^*K^*} = \gamma_{K^*}$$

$$\alpha_{1G^*}\Pi_{G^*K^{**}} = 0 .$$

Consideremos la ecuación

$$\alpha_{1G^*}\Pi_{G^*K^{**}} = 0$$

que desarrollada tendrá la forma

$$\left\| \alpha_{11}\,\alpha_{12} \ldots \alpha_{1G^*} \right\| \left\| \begin{matrix} \Pi_{1\,K^*+1} & \ldots & \Pi_{1\,K} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Pi_{G^*\,K^*+1} & \ldots & \Pi_{G^*\,K} \end{matrix} \right\| = 0$$

o sea:

$$\begin{matrix} \alpha_{11}\Pi_{1\,K^*+1} & + \ldots\ldots + & \alpha_{1G^*}\Pi_{G^*\,K^*+1} & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \alpha_{11}\Pi_{1\,K} & + \ldots\ldots + & \alpha_{1G^*}\Pi_{G^*\,K} & = 0 \end{matrix}$$

Si este sistema de G^* incógnitas ha de tener solución distinta de la

$$\alpha_{11} = \ldots\ldots = \alpha_{1G^*} = 0$$

será necesario que el rango de la matriz $\Pi_{G^*K^{**}}$ habrá de ser menor que G^*, es decir, rango

$$(\Pi_{G^*K^{**}}) \leq G^* - 1 .$$

Consideremos ahora detenidamente los casos que pueden presentarse:

1.° Rango $(\Pi_{G^*K^{**}}) = G^* - 1$.

Como el número de incógnitas que tenemos es G^*, el sistema admitirá solución, y si empleamos un criterio de normalización, por ejemplo $\alpha_{11} = 1$, todos los demás coeficientes quedarán determinados.

2.° Rango $\Pi_{G^* K^{**}} < G^* - 1$.

entonces existen una infinidad de soluciones para α_{11} y es imposible determinar unívocamente los coeficientes de la ecuación estructural. Se deduce de lo anterior, que:

Una condición necesaria y suficiente para que los parámetros de la ecuación estructural se puedan determinar a partir del sistema reducido, es que

Rango $(\Pi_{G^* K^{**}}) = G^* - 1$.

Como corolario, podemos dar la siguiente condición: $\Pi_{G^* K^{**}}$ tiene que tener, por lo menos, $G^* - 1$ columnas; de aquí que el número de variables exógenas, a las *que se exigen no intervengan* en la ecuación, por lo menos tiene que ser igual a $G^* - 1$, que se puede expresar así:

$$K^{**} \geq G^* - 1$$

como

$$K = K^* + K^{**} \qquad \text{y} \qquad G = G^* + G^{**}$$

podremos poner

$$k^{**} = k - k^{**} \geq G^* - 1 = G - G^{**} - 1$$

o sea:

$$k^{**} \geq G - G^{**} - 1$$

$$k^{**} + G^{**} \geq G - 1$$

condición que era necesaria para que la ecuación fuera identificable, como vimos en la página 20.

Una vez que hemos resuelto el primer problema nos queda por resolver el segundo. ¿Las estimaciones de los parámetros en las ecuaciones en forma reducida nos dan estimaciones correctas de los parámetros de las ecuaciones estructurales?

La contestación nos la da el siguiente teorema (1):

Sea

$$P = \begin{Vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{G1} & \rho_{G2} & \cdots & \rho_{Gk} \end{Vmatrix}.$$

La estimación mínimo cuadrática de

$$\Pi = \begin{Vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{G1} & \pi_{G2} & \cdots & \pi_{GG} \end{Vmatrix}$$

en donde ρ_{hl} converge en probabilidad a Π_{hl}.

Cualquier función racional $R(\rho_{11} \ldots \rho_{Gk})$ converge en probabilidad a la constante $R(\pi_{11} \ldots \pi_{Gk})$, siempre que sea finita. Luego la eficiencia insesgadura y consistencia asintótica la tienen los coeficientes estructurales obtenidos a partir de las estimaciones realizadas en el sistema en forma reducida.

GONZALO ARNAIZ VELLANDO

---

(1) Este teorema, enunciado de otra forma, puede verse en CRAMER, página 294, ed. Española, y es debido a SLUTILAY, *Metron*, núm. 5 (1925), pág. 3.