LA TEORIA LINEAL (*) (1)

En este estudio trataré del grupo de técnicas: Programación Lineal, Análisis de Actividad, 'Input-Output' y Teoría de los Juegos (2), que nos han llegado durante los últimos quince años, especialmente desde América. Basta un somero examen de estos temas para comprender que están íntimamente relacionados entre sí. Un análisis más detenido demuestra que se les puede situar en torno a un núcleo fácilmente reconocible, que puede ser considerado como una nueva formulación de una parte central de la teoría económica convencional. En este trabajo me propongo aislar ese núcleo, y considerar qué hay en él que deba aprender el economista que no tiene la intención de convertirse en un práctico de las técnicas indicadas (3).

(*) Artículo publicado en "The Economic Journal", diciembre 1960, número 280, vol. LXX. La traducción del original inglés ha sido realizada por Luis Angel Rojo.

(1) Este es el segundo artículo de una serie especial, que fué anunciada en el número del mes de junio, destinada a presentar un resumen de los recientes desarrollos en la teoría económica, bajos los auspicios de la fundación Rockefeller.

(2) Tengo mucho menos que decir sobre la Teoría de los Juegos que sobre las otras.

(3) Mi propósito es, por lo tanto, completamente distinto del de los numerosos libros de texto que tratan de enseñar las técnicas a los que van a aplicarlas. Sin embargo, no está lejos de eso lo que se podría haber esperado de los autores de *Linear Programming and Economic Analysis* (DORFMAN, SAMUELSON y SOLOW); es completamente cierto que, sin su trabajo, este artículo no se hubiera escrito. Mi crítica principal de su obra es que ellos no diferenciaron suficientemente su trabajo del de los libros de texto. De acuerdo con ellos, me propongo empezar de una forma completamente diferente a la que ellos usaron, aunque en fases posteriores de mi trabajo me apoyaré en ellos mucho. (Así que sería una gran molestia no tener un solo título para esos autores; y me atreveré a bautizarles, cuando lo necesite, como DOSSO, anagrama de los tres apellidos.)

Siendo esta mi finalidad, evidentemente será adecuado exponer lo que tengo que decir en una forma en que las matemáticas aparezcan lo menos posible; pero es inútil ocultar al lector que estamos tratando de un tema matemático. El fenómeno que hemos de examinar es la aplicación a la economía de un nuevo tipo de matemáticas. La diferencia más obvia entre esta nueva economía matemática y la antigua (que se remonta a Cournot), reside en el tipo de matemáticas que se están utilizando.

Durante todo el período 'neo-clásico' —en la era de Marshall, Pareto, Wicksell, e incluso en la de Pigou y Keynes— el principal instrumento matemático del economista era el cálculo diferencial, expresado en forma de símbolos (cuando era necesario), reducido (cuando era posible) a la forma de curvas. Esto era, desde luego, perfectamente natural; la mayor parte de los problemas económicos eran problemas de máximos y mínimos, y el cálculo diferencial (desde los días de Newton y Leibniz) ha sido el método corriente para abordar tales problemas. Sin embargo, hace mucho tiempo que era sabido que hay algunos problemas bastante elementales de máximos (por ejemplo, los relacionados con los perímetros de los triángulos) para los que el método de cálculo no resulta adecuado; no obstante, pueden no causar trastornos si se manejan sobre una base *ad hoc*, generalmente en términos euclidianos. El desarrollo de métodos sistemáticos para el estudio de tales casos ha sido un tema al que, en nuestro tiempo, se ha dedicado una enorme capacidad matemática. Y los nuevos métodos, una vez hallados, han resultado, con frecuencia, ser más satisfactorios que los antiguos, incluso en campos donde es posible la aplicación de ambos (4). La teoría li-

---

Hay que citar también el excelente estudio de W. J. BAUMOL ("Activity Analysis in one Lesson", *American Economic Review*, diciembre 1958). Su propósito ha estado más cerca del mío, pero yo creo que él sería el primero en admitir que hay sitio para los dos.

Los libros de texto de donde he obtenido mayor beneficio son los de S. VAJDA (*Theory of Games and Linear Programming*) y S. I. GASS (*Linear Programming*). Ambos son muy matemáticos; pero me han ayudado a percibir la estructura de la teoría (de lo que me ocuparé mucho) más claramente que lo que pude en otros sitios.

(4) De esta manera, HARDY, LITTLEWOOD y POLYA (*Inequalities*, pág. 108) dicen escribiendo (en 1934) de un tema distinto, pero relacionado con aquél: "El método (del cálculo) es atractivo teóricamente y siempre abre una primera línea de ataque sobre el problema; pero puede conducir a serias complicaciones de detalle (generalmente relacionadas con los valores límites de las variables) y se verá que,

neal, que vamos a examinar, deriva mucho de su carácter del hecho de ser una aplicación de algunos de estos novísimos métodos a la economía (5).

Todo esto hay que decirlo, incluso al principio; aunque es inevitable que, al decirlo, se despierte la sospecha de que se está usando la economía como una simple oportunidad para el ejercicio matemático, bastante valioso para los matemáticos que se entretienen en este campo de ejercicios, pero con una productividad marginal (en términos de las cosas en que están interesados los economistas) que es, después de todo, infinitesimal. No niego que haya algo de esto. Es fácil encontrar piezas del "análisis de actividad" que no hacen sino reformular un punto perfectamente obvio en términos esotéricos. Sin embargo, después de proceder a descontar todo eso quedan cosas importantes. Evidentemente estas técnicas asociadas han contribuído a la solución de ciertos tipos de problemas empresariales (y de otros problemas económicos prácticos); pero estos problemas, aunque su importancia es indudable, no constituirán el objeto principal de nuestro interés en lo que sigue. Las contribuciones que han hecho los métodos nuevos a la teoría económica, parecen, a primera vista, mucho menos importantes. No se puede decir, para la mayor parte de ellas, sino que son mejoras en las formulaciones que podemos hacer ahora de puntos familiares: cosas que sabíamos (más o menos), pero que ahora uno puede darse cuenta de que las estaba exponiendo bastante mal. Consideraremos tales cuestiones con algún detalle. Sin embargo, yo diría que estas nuevas técnicas son dignas de consideración porque llevan consigo un mayor entendimiento de algo que es bastante central: nada menos que la relación entre fines y medios, que tanto interesa a la economía. Algo de esto resultará patente, al menos así lo espero, antes de que termine este trabajo.

---

aunque sugestivo, raramente conduce a la solución más sencilla." Como veremos, lo mismo ocurre aquí.

(5) Puesto que mi educación matemática terminó en 1923, no pretendo encontrarme cómodo entre estos nuevos métodos. Sin embargo, puedo sentir bastante confianza sobre el uso que he hecho de ellos por los consejos que he recibido de un cierto número de expertos. Mi mayor deuda corresponde al Dr. H. W. Kuhn (de Princeton), que estaba pasando el año 1958-59 en Londres y que fué tan amable como para examinar un primer borrador con mucho detalle. Después, en California y en el Japón tuve el beneficio de consultas con Michio Morishima, con Kenneth Arrow y con George Dantzig. A cada uno de éstos (y también al subdirector de esta publicación, quien me llamó la atención sobre un punto que no era fácil deducir de la literatura) les doy las gracias.

I

ORIGENES

Conviene empezar la historia por un sencillo problema pedagógico. Cualquiera que haya tratado de exponer en una clase la teoría del equilibrio general de Walras (con coeficientes fijos de producción), habrá pasado por algo parecido a la siguiente experiencia. Comienza uno por el caso más sencillo posible: dos bienes y dos factores. Midiendo las cantidades de los dos bienes a lo largo de los dos ejes, uno obtiene un gráfico como el que aparece en la figura 1. Las cantidades de los dos

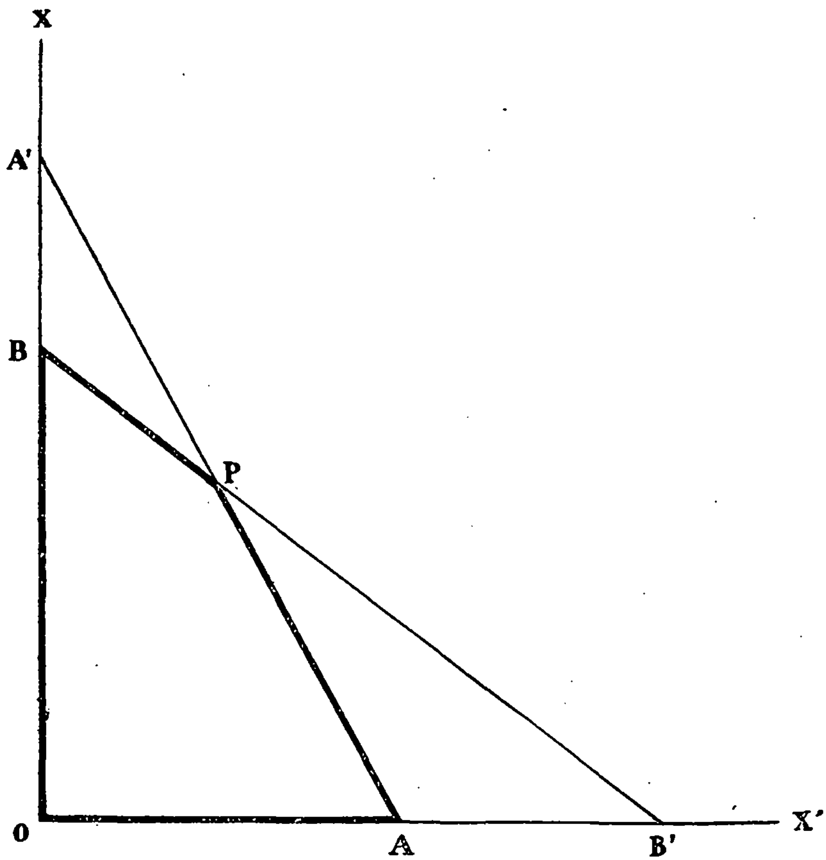

FIG. 1

bienes que se pueden producir con una oferta dada del factor A, vienen representados por la línea recta AA'; las cantidades de los dos bienes que se pueden producir con una oferta dada del factor B se representan por la línea BB'; por lo tanto, *solamente* el conjunto de cantidades representado por P, punto de intersección, *puede* ser producido en tanto se suponga (como suponía Walras) que ambos factores se mantienen empleados plenamente. Las cantidades de productos y las de factores empleadas en la producción de cada uno, parecen, por lo tanto, estar determinadas antes de que se haya dicho algo sobre precios o sobre demandas. El sistema del equilibrio general, que se supone que muestra la forma en que la producción se ajusta a la demanda a través del mecanismo de los precios, tiene un grave defecto cuando es contemplado como un medio de enseñar economía: que en el ejemplo más sencillo, en el ejemplo que es más natural tomar como ilustración, no funciona.

Ahora bien: es cierto, desde luego, que tan pronto como introduzcamos otro producto (o, más generalmente, mientras mantengamos mayor número de productos que de factores) desaparecerá la dificultad o, por lo menos, se hará menos aguda. Las cantidades de los productos dejarán de estar determinadas tecnológicamente, de manera que podrá empezar a funcionar el mecanismo de los precios. Para muchos seguidores de Walras (6) eso era bastante. El caso de coeficientes fijos, con ofertas fijas de factores, ha sido para ellos nada más que un jalón en el camino hacia algo más general; por lo tanto, no han parecido ser muy interesantes las rigideces que surgen en el caso elemental. Sin embargo, hay que admitir que es un defecto que una teoría no aclare sus propios casos elementales. La simple consideración del caso elemental es suficiente para mostrar que la teoría de Walras no puede ser completamente correcta.

Parece que no se prestó mucha atención a esa debilidad en los días de Walras y de Pareto (7). Lo que la sacó a la superficie fué la simplificación de Cassel del sistema de Lausana (8); en la versión de Cassel se hizo patente. Como es bien sabido, hubo una etapa (en la década de 1920-30) en que el tratado de Cassel estaba desplazando a los de las escuelas "histórica" y "austríaca" en las Universidades de Europa Central; durante una lucha tal, sus debilidades se observarían cuidadosa-

---

(6) Incluyendo al autor, cuando escribió *Value and Capital* (1939).

(7) Hay que hacer notar que el modelo básico de coeficientes fijos de Walras no suponía ofertas fijas de factores.

(8) *Theory of Social Economy*, part. II.

mente. No es sorprendente que esa dificultad particular fuera advertida (9); y también se comprende que la forma en que la dificultad había de ser afrontada fuera entendida por parte de algunos de los que llegaron a Cassel con unos antecedentes *austriacos* (10).

Pero hay una memorable sección en el *Grundsätze* de Menger (11), donde hace la distinción entre bienes "económicos" y "no económicos" —siendo estos últimos, según su terminología, los bienes que no tienen valor, porque la cantidad que se desea de ellos, cuando no se les asigna ningún valor, es inferior a la cantidad disponible. Hay una tendencia general (mantenía Menger) a que se ensanche la gama de los bienes "económicos" en el transcurso del desarrollo; los minerales, por ejemplo, que no tienen ningún valor en una etapa temprana del desarrollo, se hacen valiosos cuando se acumula más capital. De acuerdo con esto, para un seguidor de Menger, la determinación del equilibrio económico no implicaría simplemente la determinación de los precios de los bienes que tienen precio (como en Walras); también debería abarcar la determinación de qué bienes han de tener precio y cuáles van a ser libres. La debilidad de la construcción Walras-Cassel radica en el supuesto implícito de que se utiliza la cantidad total de cada factor disponible; una vez que se abandona este supuesto, los defectos de la construcción (incluso en el caso de dos bienes, dos factores) desaparecen.

Inmediatamente se ve, si abandonamos el supuesto de que ambos factores tienen que ser utilizados plenamente, que las combinaciones posibles de bienes que se pueden producir con los recursos disponibles no están limitadas (en la fig. 1) al punto P; comprenden todas aquellas combinaciones que están representadas por la totalidad de la superficie OAPB. Ni es P la única combinación *eficiente;* porque, si no se *deseara* el producto X_2, OA sería la cantidad máxima de X_1 que se podría producir; habría un sentido en que la producción podría hacerse máxima a lo largo de la línea quebrada APB. La única peculiaridad de P es que es el único punto en que ambos factores son escasos. Si no suponemos eso, la totalidad de APB se convierte en una *frontera.* Según varía la demanda, el punto de equilibrio puede desplazarse desde

(9) Véase la discusión de W. L. Valk (*Principles of Wages*) (1928), en "Wage Grumbles", de D. H. ROBERTSON (*Economic Fragments,* pág. 52).

(10) Artículos de NEISSER (*Weltwirtschaftsliches Archiv,* 1932), STACKELBERG (*Zeitschrift für Nationalökonomie,* 1933), y ZEUTHEN (también en *Zeitschrift für Nationalökonomie,* 1933), se citan ampliamente.

(11) Capítulo 2.

un extremo de esa frontera al otro. Durante todo este proceso está funcionando el mecanismo de los precios.

Es fácil para la "intuición" del economista "literario" llegar hasta ahí; pero, si no hubiera sido por los matemáticos, habría habido pocos progresos más allá de ese punto. El hecho de que se estuvieran preparando métodos matemáticos capaces de tratar el equilibrio de un sistema que está restringido por desigualdades, fué lo que hizo posible avanzar más. Los acontecimientos siguientes a registrar son, por lo tanto, la aparición de dos trabajos matemáticos, que no trataré de examinar con detalle, pero que hay que mencionar, puesto que de ellos arrancó todo lo demás. Más adelante procuraré describir la sustancia de sus contribuciones en términos diferentes.

El primero de esos trabajos, por orden de publicación, fué la "prueba" de Abraham Wald de la existencia de un equilibrio del sistema Walras-Cassel ampliado (como se acaba de explicar) de manera que se admitiera la posibilidad tanto de factores libres como escasos. Esta no fué, en realidad, una prueba satisfactoria, puesto que suponía que las demandas de los productos no caerían hasta cero por mucho que subieran los precios —hipótesis que difícilmente puede aceptarse. Sin embargo, demostró que el sistema "ampliado" es capaz de manipulación matemática; por ello, puede decirse que marca la primera etapa en el proceso por el cual los "austriacos" consiguieron su revancha matemática sobre los seguidores de Walras (12).

Mucho más importante, por lo que siguió, fué el famoso trabajo de John von Neumann: *A Model of General Economic Equilibrium* (para darle el título por el que es conocido entre los lectores ingleses) (13).

---

(12) El trabajo de Wald se presentó (con una introducción de Karl Schlesinger) ante un seminario en Viena, que estuvo presidido por Karl Menger (matemático, hijo del economista Menger) en el mes de marzo de 1934. Se publicó en *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, Heft 6, 1935. Hay otro trabajo en el número siguiente de la misma publicación y un artículo (que entre otras cosas, resume los resultados de esos trabajos matemáticos) en *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 1936. El artículo del *Zeitschrift* fué traducido al inglés (*Econométrica*, 1951).

Las razones que llevaron a Wald para hacer su curioso supuesto sobre las funciones de demanda han sido exploradas por el Dr. KUHN ("On a Theorem of Wald", aparecido en *Linear Inequalities and Related Systems*, Annals of Mathemathics Studies 38, Princeton, 1956). Volveré a esta cuestión más adelante.

(13) Hay una difícil cuestión de prioridad. El trabajo de von NEUMAN también se publicé en el *Ergebnisse*, de MENGER (Heft 8 de 1935-36, publicado en 1937. (La traducción inglesa está en la *Review of Economic Studies*, núm. 33, 1945-46.) Sin

El logro extraordinario de este trabajo es que ha tenido una profunda influencia sobre el desarrollo del pensamiento económico en varias direcciones diferentes. Como modelo dinámico de una economía en expansión, ha sido el padre de muchos modelos de desarrollo; pero también tiene algunos aspectos más estáticos (que sólo nos interesan en este lugar) (14); tal como han resultado las cosas hasta ahora, la influencia de éstos ha sido, por lo menos, igualmente importante. El modelo dinámico se construye como una secuencia de eslabones de "un solo período"; cada uno de esos eslabones, puesto que no hay oportunidad de ajustes en el tiempo *dentro de* él, se puede considerar como un sistema estático (o atemporal). La forma en que von Neumann estudia este sistema estático es sustancialmente la que hemos estado denominando el "Walras-Cassel ampliado; pero, en sus manos, éste está ya pasando al *análisis de actividad.* No se contenta con admitir la posibilidad de que los *inputs* disponibles puedan no ser utilizados y de que no se produzcan los *outputs* factibles; admite la posibilidad de productos conjuntos y de que no se empleen los procesos disponibles. Además, se incluye en la construcción de von Neumann una primera formulación de lo que ha llegado a conocerse como principio de Dualidad (del que tendré mucho que decir más adelante). Es singularmente apropiado que fuera von Neumann quien introdujera tal principio en la teoría del óptimo económico, pues es el eslabón que establece una conexión (más adelante examinaremos qué clase de conexión) entre esa teoría y la de los juegos.

A partir de este punto, los desarrollos posteriores empiezan a ampliarse; pero antes de discutir estos desarrollos, sería conveniente tratar de hacer una exposición de la fase alcanzada hasta aquí. Verdaderamente no hay un trabajo único que pueda decirse que corresponde exactamente a la fase que he imaginado yo. Las nuevas ideas se aglomeran unas sobre otras con tal rapidez en las pocas páginas de von Neumann, que se encuentra ya en la mitad del capítulo siguiente antes de haber terminado con el primero. Será útil examinar aquí las cosas con mayor lentitud. La teoría del "prototipo", que describiré en la próxima sección,

---

embargo, se tiene entendido que se presentó originalmente en un seminario celebrado en Princeton en 1932, lo que le coloca antes que Wald e incluso antes de cosas tales como el artículo mencionado más arriba de Neiser. (Yo sé, por recuerdos personales, que tenía estas cosas en la mente en septiembre de 1933, cuando le vi en Budapest con Kaldor. Naturalmente, yo no entendí lo que estaba diciendo.)

(14) Aunque todas las teorías que examinaremos tienen (o pueden tener) aspectos dinámicos, el lado estático nos dará bastante tema de qué hablar.

se expondrá aun en términos del "Walras-Cassel ampliado"; es decir, se refiere solamente a la asignación de ofertas dadas de factores en la producción de un cierto número de productos, cada uno de los cuales se ha de obtener combinando los factores en proporciones que vienen dadas técnicamente. Solamente después pasaré a las reinterpretaciones de von Neumann y de otros, que han tenido en cuenta no simplemente proporciones variables de factores, oferta conjunta y productos intermedios (cosas que quedan fuera del prototipo), sino que han hecho posible que el análisis se aplique a problemas de dirección de empresas que, a primera vista, son de tipos completamente diferentes. Una de las dificultades principales en los escritos posteriores es que están tan impresionados (correctamente) por esas reinterpretaciones, que insisten en empezar su *exposición en un elevado plano de generalidad.* Yo encuentro más sencillo tratar cada cosa a su tiempo; aunque la teoría que será descrita ahora es interesante, principalmente porque puede ser generalizada, es más fácil exponerla, en la primera vuelta, en un andamiaje bastante convencional.

II. EL PROTOTIPO

1. Están disponibles ciertas cantidades de M factores de producción; llamaremos a esas cantidades $b_1, b_2, \ldots, b_M$. Hay N productos que se pueden obtener utilizando esos factores; las cantidades (todavía sin determinar) de estos productos serán $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Hay coeficientes técnicos fijos; es decir, la cantidad necesaria de cada factor para obtener una unidad de cada producto está dada. La cantidad del factor i necesaria para obtener una unidad del producto j se llamará a_{ij}.

Está implicado claramente, cuando el problema se plantea en estas condiciones, que las constantes (las a y las b) deben obedecer a ciertas restricciones si han de tener sentido económico. Aunque esas restricciones parecen tremendamente obvias, tropezaríamos con serias dificultades si no las registráramos: 1) Cada b_i tiene que ser positiva; las ofertas negativas de factores carecen de sentido, y no se podría obtener posiblemente un producto que requiriese un factor cuya oferta fuera cero. 2) Los coeficientes técnicos a_{ij} no pueden ser negativos; sin embargo, podemos admitir que algunos de ellos sean cero —no todo factor ha de ser requerido para cada producto. 3) Pero alguna cantidad de un factor, por lo menos, tiene que ser necesaria para cada producto; no puede haber ninguna j para la cual $a_{ij} = 0$, para toda i. Matemáticamente, estas restricciones definen lo que hemos llamado problema prototipo. Puesto que fueron expresadas formalmente primero por Wald (creo yo), las llamaremos (junto con una cuarta regla, que se citará más adelante) *las reglas de Wald.*

Si un conjunto de *outputs* $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ —o más brevemente (x_j)— ha de ser *factible*, tiene que satisfacer dos conjuntos de condiciones o *restricciones.* Primero, ningún x_j puede ser negativo (aunque alguno o todos pueden ser cero); esto nuevamente parece obvio, pero es vital que tales cuestiones obvias no se pasen por alto. Segundo, la cantidad de cualquier factor que se requiera, para producir el conjunto (x_j) en ningún caso puede exceder a la cantidad disponible de aquel factor. El primer conjunto de restricciones —que $x_j \geqq 0$ para toda j— se podría llamar restricciones de producto. Pero, pensando en la generación siguiente, yo prefiero una denominación más general. Por lo tanto, las llamaré *restricciones de signo.* Al segundo conjunto, que implica que

$$
\begin{aligned}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1N}\, x_N &\leqq b_1 \\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2N}\, x_N &\leqq b_2 \\
a_{M1}\, x_1 + a_{M2}\, x_2 + \ldots + a_{MN}\, x_M &\leqq b_M
\end{aligned}
$$

lo llamaré, por la misma razón, *restricciones específicas.* Hay N restricciones de signo y M específicas; en total, M + N. El número de x que hay que determinar es N. Así, el número de restricciones es siempre *mayor* que el número de incógnitas cuando se tienen en cuenta todas las restricciones.

Como siempre ocurre en tales casos, es de gran ayuda hacer todo el uso posible de una representación gráfica. El problema que se acaba de plantear, para M factores y N productos, es precisamente el que fué expresado para dos factores y dos productos en la figura 1. La *región* (15) factible, como se ha dibujado, está limitada por las líneas rectas que correspondían a las cuatro restricciones o limitaciones: dos restricciones de signo (OA y OB); dos restricciones específicas (AA′ y BB′). Las reglas de Wald han hecho necesario que obtuviésemos una región factible semejante a OAPB. No se excluye que una de las restricciones específi-

(15) Me doy cuenta de que para los matemáticos la palabra *región* tiene connotaciones de *continuidad, que no se implican necesariamente en los usos que yo* haré de ella. Una terminología más correcta, sin embargo, llevaría consigo explicaciones que, para los fines presentes, son poco pertinentes. En éste y en otros casos, tengo que pedir perdón por el uso de términos en una forma menos precisa que en su sentido matemático estricto.

cas pudiera haber sido ineficaz (si AA′, BB′ no se hubieran encontrado en el cuadrante positivo), de manera que la región factible podría haber sido reducida a un triángulo. Y claramente se ve que no se excluye que uno (o los dos) de los "brazos" específicos pudiera haber sido paralelo a un eje; lo que se excluye es que ambos fueran paralelos al mismo eje, pues esto significaría que habría un producto que no necesitaría factor alguno y eso está descartado. Por lo tanto, parece que la forma poligonal (tal como OAPB), o alguna semejante, va a ser típica.

2. Ahora sería posible plantear el problema que tenemos ante nosotros, de modo que pidiéramos una determinación de todas las soluciones factibles: la respuesta a esa pregunta, en el caso ilustrado, sería la definición de toda la superficie OAPB. Pero, de todos esos puntos, solamente aquellos que están sobre la frontera APB son los verdaderamente interesantes; son solamente esos los que, en un sentido u otro, "maximizan la producción". ¿Cómo distinguimos esos puntos fronterizos del resto de los que son factibles? En principio, hay dos formas de hacer la distinción.

Una es decir que un punto factible es un punto fronterizo si es un terminal de un vector desde el origen; es decir, si establecemos que los varios *outputs* se han de obtener en proporciones fijas, la cantidad de cualquier producto (y, por lo tanto, la del producto compuesto) que se obtenga ha de ser hecha máxima. La otra consiste en decir que, si los productos se valoraran a precios fijos $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$, el valor de la producción $(\Sigma\ p_j\ x_j)$ tiene que hacerse máximo. (Debe entenderse claramente, si adoptamos esta segunda distinción, que las p tienen que ser no-negativas; podemos permitir que algunas de ellas sean cero, pero sería absurdo que todas fuesen cero. Esta es la cuarta de las reglas de Wald).

Hay ciertos fines económicos para los cuales la diferencia entre estos dos enfoques es muy importante; se puede decir que depende de ella toda la teoría de los rendimientos crecientes. Sin embargo, se puede demostrar, que con los supuestos presentes, se llega al mismo resultado; de manera que no importa cual usemos. Ha resultado ser más conveniente trabajar con la prueba del valor de la producción, según la cual, una posición en la frontera resulta maximizar $\Sigma\, px$ para (p) dadas. Un conjunto de *outputs* que cumpla esto, sujeto a las restricciones se denomina un *óptimo*.

Inmediatamente se ve que, para el caso que se presenta en nuestro gráfico, hay dos clases de óptimos: 1) el óptimo puede estar en *un vértice,* tal como A, P o B; 2) el óptimo puede estar, digamos, en *una* *parte lisa* —sobre AP o PB. Habrá varios valores de la relación de precios (p_1/p_2) que corresponderán a cada vértice óptimo; pero solamente valores particulares de la relación de precios darán un óptimo de parte lisa— pero, para esos valores, cualquier punto en la parte lisa puede ser un óptimo. Ahora se demostrará que la distinción entre óptimo de vértice y óptimo de parte lisa es válido bastante generalmente; pero, con tal fin, necesitamos algunas definiciones más generales.

3. Empecemos examinando los vértices de nuestro gráfico más de cerca. En P, los dos productos se están obteniendo y los dos factores escasean; por lo tanto, tenemos dos productos positivos (como podríamos llamarles) y dos factores escasos. En A (y en B) solamente hay un producto positivo y un factor escaso. En O (que se tiene que considerar como un vértice, aunque —en tanto que se cumplan las reglas de Wald— no puede ser un óptimo) no tenemos ningún producto positivo ni factor escaso alguno. Así, pues, en todos los vértices, el número de productos positivos es igual al número de factores escasos.

Cuando un factor es escaso, la restricción específica correspondiente se convierte en una ecuación podemos decir entonces que la restricción es *operativa.* Así, el vértice P está determinado por dos limitaciones específicas que son operativas. En A, solamente una restricción específica es operativa; pero el lugar de la otra es ocupado por una restricción de signo que ahora se hace operativa ($x_2 = O$). En O, solamente son operativas las restricciones de signo. Así, cada uno de los vértices está determinado por dos restricciones operativas —dos ecuaciones para determinar las dos incógnitas. De acuerdo con ello, se propone una regla general para la determinación de un vértice: un vértice es un conjunto de N *outputs* (x_j) que está determinado por N restricciones operativas, a ser seleccionadas del número total de restricciones (M + N). Pero esto no es todo.

Pues (como se ve claramente en el gráfico) la lista de puntos que se podrían calcular según esta regla, es mayor que la lista de vértices. Si el procedimiento anterior se aplicara a ese caso elemental, no solamente marcaría los verdaderos vértices (A, P, B y O); marcaría también los seudovértices (A′ y B′). Estos hay que excluirlos, ¿qué los excluye? Se excluyen porque no llegan a satisfacerse algunas de las restricciones que en su determinación se han tomado como no operativas. Un verdadero vértice es un conjunto de *outputs* que se determina seleccionando N de las M + N restricciones para que sean operativas, y que también satisface (como desigualdades) las restantes restricciones no operativas. Así, cuando el óptimo está en un vértice, el número de producciones positivas deberá ser igual al número de factores escasos y los factores no escasos deberán estar en exceso en cuanto a su oferta.

4. Hasta aquí en cuanto a los vértices; ahora trataremos de los óptimos que están en la *parte lisa* entre los vértices. Está claro que el número de factores escasos (16) no puede ser mayor, ordinariamente, que el número de productos positivos; porque si lo fuera, tendríamos más ecuaciones que incógnitas y el sistema estaría superdeterminado. Pero es perfectamente posible que el número de factores escasos sea *inferior* al número de productos positivos. (Así para un óptimo situado entre A y P, en la figura 1, tenemos dos productos positivos y solamente un factor escaso). Más adelante se demostrará que esa es una característica de los óptimos de parte lisa; pero será más conveniente, de momento, definirlos y exponer sus propiedades de otra forma.

Es una regla bien conocida que si α, β son dos puntos en una línea, con coordenadas (x_α, y_α) (x_β, y_β), las coordenadas de cualquier otro punto de la línea se pueden expresar como $(K_\alpha x_\alpha + K_\beta x_\beta > K_\alpha y_\alpha + K_\beta y_\beta)$, donde $K_\alpha + K_\beta = 1$. En términos de estas *ponderaciones*, el punto α es (1,0); el punto β es (0,1); cualquier punto de la línea *entre* α y β tendrá ambas ponderaciones positivas; cualquier punto fuera de α β tendrá una ponderación negativa. Por lo tanto, hay un sentido en el que podemos considerar cualquier punto de la línea entre α y β (incluyendo α y β) como una *media ponderada* de α y β; quedando entendido que las ponderaciones son no negativas y suman la unidad.

Los puntos en la parte lisa entre A y P (en la fig. 1) se pueden, pues, considerar como promedios ponderados de A y P —dos vértices que, en el caso en que el óptimo esté en la parte lisa, tienen que ser tales que, en ellos, el valor de la producción V $(= \Sigma\, p\, x)$ sea el mismo. De acuerdo con ello, se sugiere que podríamos definir el óptimo de parte lisa como una condición en la que dos vértices (o más) dan el mismo valor de producción; cualquier promedio ponderado de estos vértices puede ser entonces un óptimo. Es evidente que si V toma el mismo valor en cada uno de los punto $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, también tomará el mismo valor en cualquier promedio ponderado de $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$. Pero antes de que podamos aceptar esta definición hay otra cuestión que aclarar.

Si un punto ha de ser un óptimo tiene que ser factible; ¿cómo sabemos nosotros que esos puntos, definidos como promedios ponderados

(16) Más adelante se verá que hay una cualificación a esta afirmación que es de alguna importancia.

de los vértices, son factibles? En efecto, se puede demostrar que tienen que serlo; este es un caso especial de una propiedad general y muy importante *cualquier promedio ponderado de un conjunto de puntos factibles tiene que ser factible.* El nombre matemático de esta propiedad es *convexidad* (17); lo que tenemos que demostrar es que la región factible es convexa. La prueba es como sigue:

Supongamos que $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ sean puntos factibles. Tomemos el punto que se puede expresar como el promedio ponderado $(k_\alpha, k_\beta, \ldots, k_\lambda)$. Sustituyamos sus coordenadas (escritas plenamente) en cualquiera de las restricciones específicas; por ejemplo, en las iesimas. Entonces,

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} + \ldots + a_{iN} x_N = k_\alpha (a_{i1} x_{1\alpha} + a_{i2} x_{2\alpha} + \ldots + a_{iN} x_{N\alpha}) + \\ + \ldots + k_\lambda (a_{i1} x_{1\lambda} + a_{i2} x_{2\lambda} + \ldots + a_{iN} x_{N\lambda}) \leqq k_\alpha b_i + k_\beta b_i + \ldots + \\ + k_\lambda b_i$$

puesto que $(\alpha, \beta, \ldots)$ satisfacen las restricciones y las k son no negativas. Entonces, ya que las k suman la unidad, la última suma es b_i. De esta manera, cualquier promedio ponderado satisface las restricciones específicas, y se puede demostrar que satisface las restricciones de signo de la misma forma. Por lo tanto, es factible.

De acuerdo con ello, se puede decir que, cuando hay un "empate" entre óptimos de vértice, cualquier promedio ponderado de esos óptimos es en sí mismo un óptimo. Eso es lo que significa *óptimo de parte lisa*.

5. Hasta aquí hemos estado razonando (básicamente) por analogía; el método descrito en el último párrafo, sin embargo, se puede usar para dar algo que se aproxima un poco más a una prueba de las propiedades en cuestión.

No son solamente los puntos en *la parte lisa* los que se pueden considerar como promedios ponderados de los vértices; si tenemos en cuenta todos los vértices, cualquier punto dentro de la región factible (dentro de la región o en su frontera o límite) puede expresarse similarmente como un promedio ponderado de los vértices. (Esto se puede hacer con frecuencia de varias formas; pero eso no importa.) Además, en vista de la convexidad de la región, solamente los puntos que están dentro de la región pueden ser expresados así. Supongamos que ahora tomamos $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ como vértices, y consideremos un punto que se puede expresar por $(k_\alpha, k_\beta, \ldots, k_\lambda)$. Sustituyendo sus coordenadas en el valor de la

(17) Para hallar un estudio adicional de este concepto, véase más adelante, página 687 (*Del Libro*).

producción, como hemos sustituído previamente en las restricciones, obtenemos

$$V = \Sigma\, p\, x = k_\alpha V_\alpha + k_\beta V_\beta + \ldots + k_\lambda V_\lambda$$

en que $V_\alpha, V_\beta, \ldots, V_\lambda$ son los valores de la producción en los vértices. Entonces, puesto que las ponderaciones son no negativas y suman la unidad, es evidente que en el caso en que haya una de las V, que sea mayor que cualquiera de las otras, el óptimo se alcanza si el peso total se coloca en ese vértice; mientras que en el caso de que haya un "empate", se alcanzará un óptimo dividiendo el peso entre los vértices empatados de *cualquier manera.* Eso es todo lo que hay que decir.

6. Por lo que se refiere a la determinación del óptimo, queda completa la teoría del prototipo; sin embargo, el avance más notable de la teoría todavía ha de llegar. Este se refiere a la determinación de los precios de los factores.

Retrocedamos, por un momento, al modelo de "Walras" de dos factores y dos productos, con que empezamos. No se trata solamente de que, si lo analizamos al estilo de Walras, las producciones parecen establecerse independientemente de las demandas; sucede también que (si suponemos dados los precios de los productos) (18) los precios de los factores parecen estar determinados independientemente de las ofertas de factores. Correspondiendo a las *ecuaciones*

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1, \qquad a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = b_2$$

(que hacen que las producciones parezcan depender de los coeficientes técnicos y de las ofertas de factores solamente), hay las ecuaciones de precios y costes (que no hay beneficio que no pueda ser imputado a algún factor); éstas serán:

$$w_1\, a_{11} + w_2\, a_{21} = p_1, \qquad w_1\, a_{12} + w_2\, a_{22} = p_2$$

Tomadas por sí solas, parecen hacer que los precios de los factores w_1, w_2 dependan de los precios de los productos y de los coeficientes técnicos solamente.

(18) Walras, naturalmente, no suponía que estuvieran dados. Samuelson, sin embargo, llamó la atención de los economistas sobre la importación de este supuesto. (Véase su "Factor Price Equalization Theorem").

Como hemos visto, la primera serie de ecuaciones no es siempre válida. Necesita completarse de forma que tengan en cuenta la posibilidad de que un factor está en oferta excesiva; cuando se hace esto, las demandas vuelven a entrar en el cuadro. Un razonamiento exactamente análogo, aplicado a la segunda serie, descubre el supuesto de que las producciones de ambos bienes son positivas. Si no fuera así, si, por ejemplo, $x_2 = 0$, no habría razón por la cual el coste del segundo producto debiera ser igual a su precio. Una posible combinación de precios de factores sería tal que el precio fuera igual al coste para el primer producto, pero que resultara inferior al coste para el segundo. Entonces, el segundo no se produciría; no compensaría producirlo.

Este simple ejemplo es suficiente para demostrar que la teoría de la imputación (derivación de los precios de los factores de los precios del producto) tiene que completarse con una inclusión de casos de "desigualdad", lo mismo que se ha hecho en la teoría del óptimo de cantidad. También sugiere (y resulta ser verdad) que hay un sentido en el que una teoría es la imagen refleja de la otra. Examinemos esto más en general.

7. Supongamos que, en un óptimo particular, n de los N productos posibles son positivos, teniendo producciones nulas los restantes $N - n$. Y supongamos que m de los M factores son escasos, teniendo precios de factor nulos los restantes $M - m$ (19). Entonces parecería deducirse de nuestra discusión precedente (aunque se va a introducir una cualificación a esto dentro de un momento) que, en un óptimo de vértice, $m = n$, mientras que, en un óptimo de parte lisa, $m < n$. Tenemos que volver de nuevo a estos dos casos por separado.

En el óptimo de vértice tenemos $m = n$ ecuaciones de la forma $\Sigma\, a_{ij}\, x_j = b_i$ para determinar las n producciones positivas; y (puesto que el precio es igual al coste para cada uno de estos n productos) tenemos un número igual de ecuaciones, de la forma $\Sigma\, w_i\, a_{ij} = p_j$, para determinar los $m = n$ precios de los factores escasos. Correspondiendo a los otros factores, donde $w_i = 0$, tenemos las desigualdades $\Sigma\, a_{ij}\, x_j < b_i$. Correspondiendo a los otros productos, donde $x_j = 0$, tenemos las desigualdades $\Sigma\, w_i\, a_{ij} > p_j$. Aparte de la diferencia de signo de las dos series de desigualdades, hay una simetría completa.

El óptimo de parte lisa a primera vista confunde más. Aquí tenemos $m < n$; hay solamente m ecuaciones para determinar las n produccio-

(19) Doy por sentado que los precios de los factores no escasos son cero.

nes positivas; estas producciones, por lo tanto, están subdeterminadas, pero eso (hay que recordarlo) es lo que debía ser. Por otra parte, tenemos n ecuaciones $\Sigma\, w_i\, a_{ij} = p_j$ para determinar los m precios de los factores escasos; por lo tanto estos parecen estar superdeterminados. La explicación es que no es posible que se produzca un óptimo de parte lisa con un conjunto arbitrario de precios (p); solamente puede ocurrir para conjunto particulares de (p), que están relacionados de tal manera que pueden satisfacerse simultánamente las n ecuaciones de precios y costes. (*La teoría del valor Trabajo*, considerada como una afirmación de que los precios de los productos positivos tienen que ser proporcionales a sus costes de trabajo cuando la mano de obra es el único factor escaso, puede considerarse como un caso particular de esta proposición). Si hemos empezado con unas (p) apropiadas, podemos obtener un óptimo de parte lisa, con unas (w) correspondientes. Las restricciones sobre las (x) serán operativas para todos los factores en que w_i no es 0; y las restricciones sobre las (w), como podemos empezar a llamarlas, serán operativas para todos los productos en que x_j no es 0. Cuando w_i es 0, y cuando x_j es 0, tenemos las mismas desigualdades que antes.

Pero ahora, habiendo hallado un medio de superar el obstáculo de la superdeterminación en el caso en que $m < n$, deberíamos mirar hacia atrás para ver si no nos hemos precipitado demasiado en el otro caso. ¿No habría sido posible encontrar un camino, de forma similar, que hubiera salvado la posibilidad de que $m > n$? Entonces, los precios de los factores habrían estado subdeterminados, de manera que habría habido "parte lisa" en aquel lado —no hay dificultad en esto; pero la única forma en que m ecuaciones operativas sobre n productos positivos pueden ser satisfechas todas, cuando $m > n$, es que existan algunas relaciones especiales entre las ofertas de factores (b), lo mismo que habían de existir relaciones apropiadas entre los (p) en el caso opuesto. No hay duda de que esta salida es válida matemáticamente, y es útil al mostrar cómo podemos completar la simetría; pero no la he querido traer a colación hasta ahora, porque creo que el economista se siente, justificadamente, un poco cauteloso ante ella, por lo menos en la aplicación presente. Indudablemente está interesado en los óptimos que se alcanzarán en distintos (p), algunos de los cuales ciertamente estarán relacionados entre sí, de forma que el caso en que $m < n$ es importante para él; pero había empezado pensando que las ofertas de factores estaban ***dadas***, de suerte que las relaciones entre ellas, que permitirían que más de n factores fueran escasos simultáneamente, serían más bien una casualidad.

Sin embargo, es una posibilidad y una posibilidad que, en esta fase, tiene consecuencias importantes.

Porque llegamos ahora al Principio de Dualidad. Las condiciones que regulan los *outputs* (x) y los precios de los factores (w) en una posición óptima se corresponden exactamente. Sin embargo, habíamos determinado las (x) de una forma que podía describirse completamente sin introducir las (w); puesto que las restricciones sobre las (w) son tan notablemente similares, se sugiere poderosamente que las (w) podrían haber sido determinadas *independientemente* de un modo similar. Que esto es, en realidad, así se puede demostrar de la forma siguiente.

8. Empezamos con la condición de que las (x) deberían ser *factibles*: en el sentido de que son no negativas y de que sus exigencias de factores no exceden las ofertas de factores disponibles —es decir que $\Sigma\, a_{ij}\, x_j \leq b_i$ para toda i desde 1 hasta M (las restricciones específicas). Nos encontramos imponiendo un conjunto paralelo de restricciones sobre las (w); que deberían ser no negativas y que los costes de los productos, a estos precios de los factores, deberían ser igual o exceder a los precios dados de los productos, es decir que $\Sigma\, w_i\, a_{ij} \geq p_j$, para todas las j desde 1 hasta N (que podemos considerar como restricciones específicas sobre las (w). Evidentemente, podemos decir que las (w) son *factibles* si satisfacen las restricciones que se acaban de establecer.

Ahora tomemos las restricciones específicas sobre las (x), multipliquémoslas cada una de ellas por la w correspondiente y sumemos. Puesto que, si las (w) son factibles, tienen que ser no negativas, la desigualdad resultante se cumplirá siempre que (x) y (w) sean factibles. Lo que esto expresa es que el coste del conjunto de *outputs* (x_j) valorados a los precios de los factores (w_i), no puede ser mayor que el valor total de los factores a esos mismos precios de factores. Si este coste es C, y ese valor de los factores B, tenemos $C \leq B$, siempre que (x) y (w) sean ambos factibles.

Tomemos luego las limitaciones específicas sobre las (w), multipliquemos cada una de ellas por la (x) correspondiente, y sumemos. Si ambos (x) y (w) son factibles, la desigualdad que resulta de esta operación también se tiene que cumplir. Lo que quiere decir es que el valor total de los productos, a los precios (p) no pueden exceder al coste total de aquellos productos, a los precios de los factores (w). $V \leq C$, cuando (x) y (w) sean ambos factibles.

Hasta ahora no hemos hecho ningún uso de las condiciones de óptimo. Pero es fácil demostrar que cuando (x) es óptimo, $C = B$; pues, cuando w_i es positivo, la restricción correspondiente es entonces una ecuación y, cuando no es una ecuación, la correspondiente $w_i = 0$. Similarmente, cuando (w) es un óptimo —o tal que corresponda a un óptimo (x)— tenemos $V = C = B$. (¡Las cuentas sociales salen bien!)

Para cualesquiera (x) y (w) factibles, $V \leq B$; ninguna V factible puede exceder a cualquier B factible. Las B factibles se hallan por encima de las V factibles, excepto en cuanto a la posibilidad de que algunas V factibles y algunas B factibles sean iguales. En el óptimo, $V = B$, de forma que se realiza esa igualdad. Se deduce que ninguna V factible puede exceder a la V *óptima*, de manera que, en el óptimo, V es maximizada; eso, naturalmente, no hace más que confirmar la definición con que empezamos. Pero también se deduce *que ninguna B factible puede* ser menor que la B óptima, de manera que, en el óptimo B, se minimiza. Podríamos haber determinado los precios de los factores de "*equilibrio*" como un problema de óptimo *independiente*: buscando aquellos precios de factores que minimizan el valor de los factores, sujetos a la condición de que el coste unitario de ningún producto caiga por debajo de su precio dado (del producto).

9. Esta, creo yo, es la forma más sencilla de demostrar, o al menos de explicar, el Principio de Dualidad; pero tal vez haya un poco más que decir para que quede plenamente patente el significado del principio. Es más bien un defecto del tratamiento precedente que se ha tenido que introducir los precios de los factores, al estilo de Walras, como elementos en un modelo de capitalismo competitivo, en el cual los precios de los factores gobiernan la *distribución*; en la otra parte de la teoría, en la que se han determinado las *cantidades* óptimas, no ha hecho falta un supuesto semejante. En efecto, podría haber sido posible haber introducido los precios de los factores sin referencia a las participaciones distributivas como instrumentos de optimización de cantidad; aunque no hubiera sido tan fácil llevar a cabo el razonamiento en detalle, podríamos haber procedido de un modo semejante al siguiente:

Supongamos que se establecen precios arbitrarios (no negativos) para los factores y que a un empresario (o planificador) se le proporciona un fondo que es exactamente el suficiente para permitirle emplear la totalidad de las ofertas disponibles de los factores a esos precios dados de los mismos. Supongamos que trata de hacer máximo el valor de la producción bajo la única restricción (específica) de que el coste de la producción no ha de exceder al valor de su fondo; es decir, que $C \leq B$.

Las producciones que escogerá, no serán, muy probablemente, factibles; infringirán alguna de las limitaciones específicas *por separado*, que (estamos, naturalmente, suponiendo) aún se mantienen. Sin embargo, se deduce de nuestro análisis anterior (sería bonito disponer de alguna prueba *directa* sencilla, pero no veo ninguna) que habrá algún conjunto de precios de factores, nuestro (w) óptimo, en el que el óptimo que escoja será, de hecho, factible y verdaderamente será un óptimo de la totalidad del sistema. Los precios de factores óptimos son los precios de factores *adecuados* en este sentido.

Según este enfoque, la distribución solo interviene, si es que lo hace, de una manera secundaria. Si todos los precios de los factores fueran variados en la misma proporción la restricción $C \leqq B$ no sería afectada *en términos reales*; exactamente las mismas combinaciones de producción están abiertas, o parecen estarlo, que antes. Así, por la prueba precedente, el óptimo (w) permanece indeterminado, en la medida de un multiplicador; a fin de determinar su nivel, tendremos que imponer alguna condición adicional, y la condición de que el valor de la producción, en el óptimo, debería ser igual a su coste, es una condición que evidentemente convendría imponer. Entonces todo sucede como se ha explicado.

Esto está muy cerca de la forma en que los economistas han pensado en la determinación de los precios de los factores en relación con la de las cantidades de productos; el descubrimiento de que la determinación del precio de los factores es un problema de óptimo por sí mismo, de forma que podemos empezar por cualquier extremo, es claramente más difícil de situar. Uno puede ver que tiene sentido en términos económicos (cuando se admite la posibilidad de producciones cero); pero es una formulación que difícilmente se le habría ocurrido al economista si no hubiera sido sugerida por el matemático. Lo más cercano que se le podría haber ocurrido habría sido decir que la maximización de la producción es una minimización de la escasez de los recursos aplicados. Esa es la forma en que un economista podría haber querido hablar; pero difícilmente hubiera creído que tenía razón al hacerlo así. Lo que tiene que aprender ahora es que hay una forma en que está justificado hacerlo así, después de todo.

III. MAS ALLA DEL PROTOTIPO

El resumen que acabo de ofrecer se ha limitado a una formulación de la Teoría Lineal en términos de Walras-Cassel; sin embargo, es preciso subrayar que ninguna de las obras corrientes la exponen en esos términos, y está bastante clara la razón de ello. Las reacciones que parece que hemos estado analizando tan cuidadosamente —las variaciones en las clases de factores que son escasos y de productos que se pueden producir y que realmente se producen— apenas si son tan importantes en el mundo real como para merecer una atención tan detallada. Ciertamente, parece raro tratar de ellas con tanto detalle antes de que tratemos otras cuestiones más importantes. La costumbre walrasiana de dar estas cosas por sentadas *antes* de que se monte el sistema de equilibrio, no es tan irrazonable (en la aplicación directa). La principal razón por la que la teoría del prototipo vale la pena, es que, una vez que se tiene, puede ser muy fácilmente interpretada de otras formas.

En el camino de estas reinterpretaciones económicas hay, sin embargo, algunas reinterpretaciones y ampliaciones matemáticas que hay que advertir. Para el matemático, son bastante obvias; son las razones por las que ningún matemático se detendría en la teoría prototipo. Pero, puesto que han sido excluídas de la teoría prototipo, hay que exponerlas antes de ir más lejos.

1. Se recordará que, en nuestra formulación del prototipo, empezamos imponiendo ciertas limitaciones o restricciones "económicas" a las constantes —las reglas de Wald—. Las a tenían que ser no negativas (con la condición de que algún factor ha de ser necesario para cada producto); las b tenían que ser positivas; y entonces estaba la regla suplementaria de que las p tenían que ser no negativas (pero no todas cero). Aunque estas restricciones eran útiles para empezar, puede que se haya advertido que, al final de nuestra discusión, estaban resultando bastante débiles. El poblema de la minimización, que apareció como el dual, podría haber sido expresado como un problema de maximización de la misma forma que el original (o primario —primal— como se le está llamando); pero, en tal caso, los signos de *todas* las constantes hubieran debido ser cambiados. Dábamos por sentado que un problema de esa clase podría tratarse casi de la misma manera. Pero esto plantea una pregunta más amplia: ¿necesitamos imponer alguna restricción a las constantes?

Matemáticamente, la respuesta es negativa. Casi la totalidad de lo precedente puede reelaborarse sin las reglas de Wald; de forma que las a, b o p podrían ser positivas, cero o negativas. La principal dificultad que surge, si se hace esto (esta es la razón por la que parecía mejor empezar con las reglas de Wald), es que hemos de tener en cuenta algunas posibilidades secundarias que evidentemente son excluídas en muchas interpretaciones económicas, de manera que era bastante conveniente poder ignorarlas al principio. No trataré, ni incluso aquí, de elaborarlas adecuadamente; sin embargo, hay que hacer una breve descripción.

Es posible, en primer lugar, si no se establecen restricciones sobre las constantes, que pueda no haber una solución factible, una "región factible". Las restricciones específicas pueden ser mutuamente contradictorias o pueden contradecir las restricciones de signo. (Por ejemplo, $x_1 \leqq -6$ es una restricción específica posible si admitimos cualesquiera constantes; pero contradice la restricción de signo $x_1 \geqq 0$).

Segundo, incluso si hubiera una región factible, no es necesario que fuera 'optimizable' para una (p) dada. Evidentemente, si no hubiera restricciones específicas (solamente de signo), mientras las p fueran positivas, no habría óptimo, puesto que V podría aumentar indefinidamente. Lo mismo podría ocurrir si hubiera limitaciones específicas que no llegaran a limitar la región factible en alguna dirección.

Ninguna de estas cosas puede ocurrir con las reglas de Wald; no pueden ocurrir con el problema primario (20), ni pueden ocurrir (es importante hacerlo notar) con el problema prototipo dual (21). Este es un caso particular de un teorema general: el *Teorema de la Dualidad*, que dice que si existe un óptimo para el primario, también existe para el dual. No trataré de demostrar este teorema, que es cierto para cualquier valor de las constantes. Hay también una ampliación del teorema que enlaza las dos excepciones: dice que si el primario, aunque facti-

(20) Según las reglas de Wald el origen (todas las producciones cero) siempre es factible. Eso es bastante para demostrar que tiene que existir una región factible. Aumentando (x) a lo largo de cualquier vector, siempre encontrará una restricción; por lo tanto, V debe tener un valor máximo.

(21) Según las reglas de Wald, un valor cero para todo w *nunca* es factible; pero una solución factible siempre se puede encontrar dando a las w valores suficientemente grandes *positivos*. Tiene que existir un valor mínimo entre el valor correspondiente de B y el valor cero (que no es factible).

ble, no fuera 'optimizable', el dual no sería factible (22). Puesto que cualquier problema (naturalmente) puede considerarse como primario, la correspondencia se cumple (en un sentido) en ambas direcciones. Sin embargo, vale la pena hacer notar que continúa existiendo la posibilidad de que ambos, el primario y el dual no sean factibles (23). Este es un caso raro, pero puede darse.

2. *Convexidad.*—Si existe una región factible tiene que ser convexa; pues la prueba de convexidad (que se ha dado más arriba) (24) es independiente de las reglas de Wald; se cumplirá para cualquier valor de las constantes (25). Todavía estamos tratando con las propiedades de la convexidad, y continuaremos haciéndolo así en todas las formas de la teoría lineal. Puesto que esto tiene el efecto de establecer una fuerte limitación al orden de problemas económicos a los que es aplicable la teoría, convendrá considerar el concepto un poco más profundamente antes de ir más adelante.

¿Cuál es la relación (podríamos empezar preguntando) entre ese

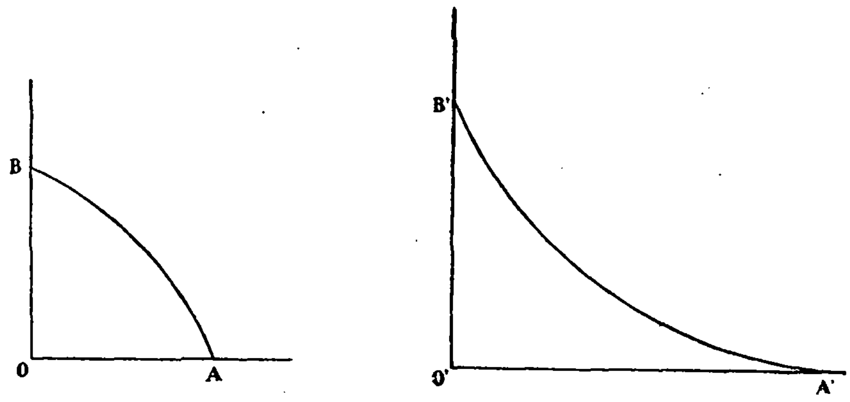

FIG. 2

(22) Esto se puede ilustrar fácilmente con una ligera variación de nuestro caso prototipo.

Si mantenemos las otras reglas, pero admitimos la existencia de un producto que no requiere ningún factor para su obtención, el primario no será susceptible de óptimo, si tal producto tuviera un precio positivo. Pero el coste de aquel producto tiene que ser cero, a cualesquiera precios de factores; así tiene que ser menor que el precio positivo del producto; el dual no puede ser factible.

(23) Un ejemplo se da en VAJDA, pág. 78.

(24) Véase más arriba, pág. 680 (*Del Libro*).

(25) Otras partes del razonamiento del "prototipo" exigirían más modificación; pero no tocaré esto aquí.

concepto de convexidad y el que, hasta ahora ha sido más familiar a los economistas en las obras, por ejemplo, de Pareto o de Joan Robinson? Estamos acostumbrados a decir que una curva, como A B (fig. 2), es "convexa hacia afuera" si su pendiente aumenta continuamente en términos absolutos, a medida que uno se mueve hacia abajo a lo largo de ella. Esta definición es claramente diferente de la que hemos usado aquí, puesto que la una es una propiedad de una región y la otra de una curva; pero puesto que la región O A B es convexa según la nueva definición (26), mientras que O' A' B' no lo es, parece como si tuviera sentido decir que una región convexa es la que se halla limitada por algo así como una curva "convexa hacia afuera".

Desde luego es cierto que se puede definir una región convexa de una forma semejante a ésta. La convexidad de la curva A B (figura 2) se podría haber indicado por el hecho de que la tangente en cualquier punto de la curva se halla fuera de la región O A B, excepto en el punto de tangencia. Podemos eliminar la excepción sobre el punto de tangencia (bastante embarazoso en el caso de límites lineales), si expresamos la misma propiedad de una forma algo diferente. Podemos definir una región convexa como aquella que es tal que se puede trazar por cualquier punto *exterior* a la misma una recta (27), de manera que la totalidad de la región se encuentre a un lado de tal recta (sin que ningún punto de la región se encuentre en la recta). Es obvio que si una región es "dentada" (como la O' A' B') esta condición no se satisfará en un punto que se encuentre dentro del "diente". Se puede demostrar que esta definición de "no dentada" equivale a la definición de "promedio ponderado" que utilizamos previamente.

No voy a tratar de demostrar esa equivalencia; es una de las cosas que los economistas pueden razonablemente tomar de los matemáticos (28). Sin embargo, es de gran utilidad para el economista saber

(26) Es suficiente observar que, si α y β son dos puntos dentro de la región (o en su frontera), cualquier punto entre ellos, en la misma línea que los unía, estará dentro de la región en el mismo sentido.

(27) En dos dimensiones; plano, o lo que corresponda, en más de dos.

(28) No es difícil demostrar que la "convexidad no dentada" implica la convexidad "promedio ponderado"; demostrarlo de otra forma (el "teorema del hiperplano soportador") es claramente más embarazoso. Hay una prueba en *Theory of Games*, de VON NEUMANN y MORGENSTERN, págs. 134 y ss.; véase también VAJDA, *op. cit.*, página 22. La prueba más clara que conozco es la dada por DEBREU en un apéndice a KOOPMANS y BAUSCH, *Selected Topics in Economics Involving Mathematical Reasoning*, Cowles Foundation Paper, núm. 136, pág. 96.

que la equivalencia existe. Porque, una vez que la tenemos, podemos ver inmediatamente que la convexidad, que es tan importante en la teoría lineal, es fundamentalmente la misma cosa que estamos acostumbrados, en nuestros gráficos, a considerar como un fenómeno de *rendimientos decrecientes*. La convexidad, en el nuevo sentido, cubre tanto los rendimientos constantes como los decrecientes (si A B fuera una línea recta, la región O A B aún sería convexa). Lo que no cubre son los rendimientos crecientes (ilustrados por O' A' B'). Podemos comprobar esto observando que, bajo rendimientos crecientes, una producción cero a un coste cero puede ser factible, una producción x a un coste c puede ser factible; pero una producción $\frac{1}{2}\, x$ a un coste $\frac{1}{2}\, c$ no será factible.

En rendimientos crecientes habrá también una falta de correspondencia entre los dos sentidos de óptimo. Una posición que lleve al máximo la producción en el sentido de cantidad (que es el máximo que se puede producir cuando la producción de mercancías se tiene que combinar en proporciones fijas) no hará necesariamente máximo el valor de la producción para *cualquier* conjunto de precios de los productos. Es una propiedad de convexidad (una consecuencia de la equivalencia de las dos definiciones de convexidad) que los dos sentidos de óptimo vienen juntos.

Por consiguiente, estamos a la vista de una reformulación bastante poderosa de una distinción que desde hace mucho tiempo los economistas sabían que era crucial. La razón por la que los supuestos de rendimiento constantes y de rendimientos decrecientes son mucho más manejables que los supuestos de rendimientos crecientes consiste en que, en los primeros casos, podemos usar las propiedades de convexidad, mientras que, en el último, no. No hay, en realidad, grandes dificultades para tratar los fenómenos de los rendimientos decrecientes por métodos lineales (cabe siempre aproximarse a una curva mediante un polígono) (29); pero la teoría lineal, puesto que se basa en la convexidad, no

(29) No quiero decir que tengamos que introducir una reformulación lineal a fin de hacer uso del concepto "promedio ponderado" de convexidad. Realmente es obvio por los gráficos de la figura 2 que no lo tenemos que hacer. Es posible (y útil) reformular la economía paretiana (con fronteras curvas y curvas de indiferencia) en términos de las propiedades de convexidad. Esto se ha hecho, de una manera que se convertirá en clásica, en el primero de los *Essays on the State of Economic Science*, de Tjalling Koopmans (1957). *Quisiera aprovechar esta oportunidad* para expresar la deuda que he contraído con tan admirable obra, que ha te-

se puede extender, sin perder muchas de sus virtudes, hasta el reino de los rendimientos crecientes.

3. *La forma ecuacional.*—Es el momento adecuado para mencionar otra complicación: que la forma en que hemos estado planteando el problema de optimización no es, en modo alguno, la única forma en que puede plantearse lo que es, en sustancia, el mismo problema.

Las ofertas excesivas de los factores (que son cero en el caso de factores escasos, y tienen que ser positivas cuando el factor no escasea) son una parte del problema (primario); son determinadas, junto con las producciones (x_j), cuando maximizamos V con sujeción a las restricciones. Si hubieran sido introducidas explícitamente, el problema primario se podría haber expresado como una maximización de V, sujeta a las *ecuaciones*

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{iN}\, x_N + e_i = b_i$$

(para todos los factores), junto con las restricciones de signo de las producciones y sobre las ofertas excesivas ($x_j \geq 0$, $e_i \geq 0$). Ahora bien, tan pronto como hayamos dejado las reglas de Wald tras de nosotros (de manera que no tengamos que preocuparnos por los signos de las constantes), esto es exactamente lo mismo que maximizar

$$\Sigma\, q_j\, x_j + \Sigma\, q'_i\, e_i$$

en que q y q' son nuevos conjuntos de precios-ponderaciones; pues las e siempre se podrían eliminar de la última suma con la ayuda de las ecuaciones dadas. (Entonces se reduciría a la forma conocida $\Sigma\, p_j\, x_j$, dependiendo las p de las q y q' dadas y de las a dadas). El problema de optimización es, por lo tanto, el mismo que la maximización de una "suma ponderada" de s variables, *todas* las cuales han de ser no negativas y que están conectadas por t ecuaciones ($t < s$) (30).

La formulación "ecuacional", que reduce todas las restricciones a

nido más efecto sobre este trabajo de lo que puede parecer superficialmente. (La otra obra, que se ha citado en la nota a pie de página anterior, no apareció hasta después de haberse escrito prácticamente este estudio.)

(30) Si $t > s$ y las ecuaciones son independientes, el problema sería superdeterminado y no podía tener una solución. Si $t = s$ y las ecuaciones fueran independientes, determinarían ellas mismas una sola solución, que sería la solución efectiva si satisficiera las restricciones de signo.

restricciones de signo a expensas de aumentar el número de variables es, desde luego, la que se usa más corrientemente, en las obras sobre Programación Lineal (31). He preferido plantear la cuestión de otra forma que (puesto que opera con menos variables) ofrece más campo para la ilustración geométrica. Además, el método ecuacional está en menor contacto evidente con la economía tradicional. Sin embargo, es apropiado para algunas aplicaciones económicas (como veremos dentro de unos momentos). Conviene estar listos para trabajar en cualquier forma (32).

IV. PROGRAMACION LINEAL

Nuestro esbozo de la teoría fundamental está ya completo; volvamos ahora a la historia.

Para que naciera la Programación Lineal dos cosas más eran necesarias:

1. Había que darse cuenta de que hay otros problemas, aparte de la maximización "económica" directa del valor de la producción a partir de recursos dados, que son formalmente equivalentes a la optimización económica. Se tenían que encontrar oportunidades para la aplicación de la teoría generalizada (que ha sido descrita en la sección precedente de este estudio). Es corriente asociar esta fase con dos ejemplos que se han convertido en clásicos: el "problema del transporte", planteado en 1941 por F. L. Hitchcock (33), y el "problema de la dieta", que fué planteado en un trabajo (aún no publicado) de Jerome Cornfield, que

---

(31) La razón de esto es principalmente de cálculo. Si un problema se presenta en forma de desigualdad, se convierte fácilmente en forma ecuacional, con la introducción de variables "flojas" (tales como nuestras *e*). El proceso inverso implica resolver las ecuaciones, lo cual bien pudiera resultar extraordinariamente laborioso.

(32) Si las variables primarias (*x*) se completan con la introducción de las ofertas excesivas de los factores, las variables duales (*w*) tienen que completarse similarmente con la introducción de las diferencias en las desigualdades duales. Estas en nuestra formulación prototipo son las diferencias entre coste y precio —podríamos llamarles las *desventajas* (unprofitabilities) de los productos. Cuando se incluyen éstas, el problema dual se reduce, a su vez, a la minimización de una suma ponderada de N variables, sujetas a restricciones de signo y conectadas (ahora) por N-M ecuaciones.

(33) En el *Journal of Mathematics and Physics*, Massachussetts Institute of Technology, vol. 20, págs. 224-30.

circuló en ese mismo año (34). Probablemente sea más correcto considerarlos nada más que como precursores. Los verdaderos creadores de la Programación Lineal fueron quienes se dieron cuenta de las oportunidades en relación con la producción de guerra: Tjalling Koopmans, quien redescubrió el problema del transporte en relación con la navegación y G. B. Dantzig, quien tropezó con problemas semejantes en su trabajo para las Fuerzas Aéreas de los EE. UU. (35). Cuando se unieron Koopmans y Dantzig después de la guerra, fué cuando las cosas sucedieron realmente (36). Aquí, sin embargo, nos limitaremos a unas palabras sobre los ejemplos clásicos.

El problema de la *dieta* —determinar la dieta más barata con la que se puede conseguir una ingestión mínima de ciertas sustancias nutritivas— está muy cerca de nuestro prototipo; en verdad, cuando se plantea, se ajusta exactamente al prototipo dual. (Las cantidades de nutrientes en cada alimento son las a; las cantidades de alimentos son las w; las ingestiones mínimas son las p, y los costes de los alimentos son las b. Cada nutriente tiene que estar contenido en algún alimento o —como se ve inmediatamente— el problema no es posible.) El problema del *transporte* —determinar la forma más barata para abastecer las demandas dadas de m mercados desde n fuentes, con costes unitarios de transporte dados desde cualquier fuente hasta cualquier mercado— es, en cierto sentido, más interesante, puesto que es un bello ejemplo de un problema que se plantea en términos de *ecuaciones* entre variables no negativas. (Hay que determinar la cantidad a entregar desde *cada* fuente a *cada* mercado; éstos están conectados por ecuaciones, puesto que las ofertas totales de cada fuente y la demanda de cada mercado están dadas.) Aunque se pueden eliminar algunas de las variables por medio de las ecuaciones, de manera que se pueda volver a la determinación de $(m-1)$ $(n-1)$ variables, conectadas por $m+n-1$ restricciones específicas, la elección de las variables que se han de elimi-

(34) Estos han sido descritos en innumerables sitios. Hay una sencilla exposición en G. Morton, "Notes on Linear Programming", *Economica*, 1951; y una más amplia en Dosso, capítulos 2 y 5.

(35) La influencia de la obra de Leontief, al demostrar la aplicabilidad práctica de una forma de la teoría de la asignación de recursos, llevando la atención de los economistas a un modelo en que los artículos producidos figuran como *inputs* (esto, como veremos, significa ir más allá de las reglas de Wald), también merece que se reconozca.

(36) Véase su volumen (insoportable). *Activity Analysis of Production and Allocation*, ed. Koopmans (1951).

nar es muy arbitraria; y aunque los costes unitarios iniciales sean todos positivos, no hay garantía de que se vaya a cumplir lo mismo para los coeficientes que ocupen sus puestos después de la eliminación. Así, el problema del transporte exige ya la teoría más general, aunque para el problema de la dieta es suficiente el prototipo.

2. El simple planteamiento de estos problemas no habría sido un avance si no hubiera existido un método por el cual se pudiera resolverlos. El desarrollo principal en esa dirección había de llegar un poco después. No obstante, tiene que quedar bien claro que, aun antes de la invención del método Simplex, los problemas podían resolverse *en principio;* tan pronto como es sabido que el óptimo (si lo hay) tiene que estar en un vértice o entre vértices *ligados,* la identificación de los vértices (y había una regla para ello) y el cálculo del coste (como sucedía en estos ejemplos) en los vértices, siempre conducía a una solución *al fin.* Con sencillos ejemplos de clase, no se trata, con frecuencia, de una empresa imposible. Pero, en cualquier ejemplo práctico, la cantidad de trabajo que hay que realizar aumenta rápidamente (37). Incluso con la ayuda de calculadores electrónicos (cuyo simultáneo desarrollo ha sido un factor fundamental en el éxito práctico de la Programación Lineal), la solución de la mayor parte de los problemas reales todavía quedaría fuera de nuestro alcance sin la invención de métodos mejores.

Cualquier discusión detallada de tales métodos se halla forzosamente fuera de los límites de este estudio. No obstante, es preciso hacer referencia al método Simplex (descubierto en 1947 por Dantzig) (38), que fué históricamente el medio por el cual esta dificultad quedó suficientemente superada, haciendo de la Programación Lineal una técnica utilizable. Efectivamente, lo que proporciona el método Simplex es un medio para reconocer un óptimo cuando lo hemos alcanzado; y para que, una vez que un vértice (vértice verdadero) cualquiera ha sido identificado, podamos desplazarnos desde el mismo en *la dirección* del óptimo. Se trata una consecuencia de la convexidad. Si uno estuviera tra-

(37) Podría ser útil tomar un ejemplo del problema de los transportes. Si no hubiera más que 5 fuentes y 4 mercados, habría 20 variables a determinar; incluso después de la eliminación, no se pueden reducir a menos de $4 \times 3 = 12$ variables, sujetas a 12 restricciones de signo y a $5 + 4 - 1$ restricciones específicas: 20 en total. El número de vértices *posibles* es el número de formas en que pueden seleccionarse 12 de 20, esto es, nada menos que 127.970. Por lo tanto, en caso de obstinación, se necesitaría más de un octavo de millón de cálculos, cada uno importante.

(38) Expuesto por el autor en el capítulo 21 de *Activity Analysis* (op. cit.). Naturalmente, se encuentran versiones en todos los libros de texto.

tando de escalar una montaña y supiera que era una montaña convexa (sin valles o depresiones), el camino más corto para llegar a la cima sería ir derecho hacia arriba desde cualquier sitio donde se encontrara uno. Eso es lo que el método Simplex (más o menos) (39) hace en n dimensiones.

La debilidad del método Simplex (tal como se ha descrito hasta aquí) radica en que exige la identificación de algún vértice (verdadero) como punto de partida. Algunas veces éste se puede encontrar por inspección (en el caso de un problema que cumpla las reglas de Wald, presentaría poca dificultad); pero, con mucha frecuencia, no es posible, salvo por casualidad. Si no se puede, hay que efectuar una investigación preliminar, antes de que pueda empezar el proceso anterior. Se han sugerido diversos métodos para sistematizar esa fase preliminar; el que parece más útil generalmente es una adaptación del propio método Simplex. Introduciendo variables adicionales en el problema original puede plantearse un problema subsidiario que sea tal que: 1) un verdadero vértice del subsidiario se pueda encontrar por inspección; y 2) un óptimo del subsidiario sea un verdadero vértice del problema original. Así, el subsidiario puede resolverse por el método Simplex; una vez que se ha resuelto el problema subsidiario, se puede aplicar el método Simplex al problema original sin dificultad (40).

---

(39) Más exactamente, se puede describir del modo siguiente: Como hemos visto, cualquier vértice A es una solución de n de las restricciones de signo y específicas consideradas como ecuaciones. Un vértice *próximo* a A puede definirse como aquel que es una solución de $(n-1)$ de las ecuaciones de A, junto con *una* de aquellas que no fueron tomadas cuando se determinó A. (Naturalmente, A tiene que ser un vértice verdadero, y los vértices vecinos tienen que ser verdaderos vértices). Si A es un óptimo, el valor de V $(= \Sigma\, p\, x)$ en A, por supuesto, no tiene que ser inferior al valor en cualquiera de los vértices vecinos. Es menos evidente, pero es cierto (como consecuencia de la convexidad), que si A no es un óptimo, tiene que haber por lo menos uno de los vértices vecinos donde el valor de V sea mayor que lo es en A. (Este es el mismo principio que aquél que es familiar a los economistas, según el cual, en rendimientos decrecientes generales, un máximo está suficientemente determinado examinando las condiciones marginales.) Por lo tanto, a fin de descubrir si A es un óptimo, solamente se necesita examinar sus relaciones con sus vértices vecinos. Y, a fin de avanzar lo más rápidamente posible hacia el óptimo desde un vértice dado, sólo es necesario seleccionar aquel de los vértices vecinos a lo largo del "borde" hacia el que V aumenta más rápidamente; luego se repite la operación con el vértice así alcanzado; continuando hasta que se haya encontrado un vértice desde el cual no haya aumento hacia ningún vértice vecino. Este es el método Simplex.

(40) Para una descripción de este artificio, véase Gass, *Linear Programming*, páginas 61-66.

Se usan, sin embargo, otros métodos. Algunas veces es útil empezar tratando el dual del problema original; el dual puede escribirse, desde luego, inmediatamente, y una vez que se ha resuelto el dual, se puede resolver el primitivo inmediatamente. (Un caso evidente de esto es aquel en que el primario tiene varias variables, pero solamente dos limitaciones específicas; pues, entonces, el dual se puede reducir a dos variables y se puede resolver gráficamente.) También está el método Dual Simplex, en el que el dual se mantiene a la vista en todo momento. Un ataque directo a la dificultad de encontrar un vértice desde el que partir se hace por el 'método Multiplex' (publicado en 1957 por Ragnar Frisch) (41). Este requiere solamente un punto factible (no un vértice) como punto de partida; desde aquél identifica un "centro" de la región factible; si uno se mueve desde el centro en la dirección creciente de V, debería llegar cerca de un óptimo.

Estos son los instrumentos básicos que están a disposición de quien practica la Programación Lineal; con estos medios un problema se puede resolver, si se puede plantear en forma apropiada, y parece que hay muchos problemas que se puedan moldear así (42). La mayor parte de ellos (como el problema de la dieta y el de los transportes) son problemas del método de coste mínimo para llevar a cabo un programa dado; muchos problemas (militares y civiles) del sector público se acoplan con bastante naturalidad a esa forma. Pero puesto que los coeficientes en la suma ponderada que se ha de maximizar (o minimizar) pueden ser *positivos* o *negativos* (cuando hemos abandonado el prototipo), no hay razón alguna por la cual la determinación de una combinación de *inputs* y *outputs* (dados los precios de los *inputs* y *outputs*) correspondiente a un beneficio máximo no se pueda tratar de una forma similar. Por lo tanto, los usos de la Programación Lineal no se limitan al sector público, sino que se pueden extender, por lo menos en cierta medida, al campo de la empresa privada.

No obstante, una duda penetra en este punto; y parece adecuado que, en un estudio como éste, tales dudas se mencionen. ¿Cuál es la relación entre esta nueva técnica y el proceso de ajuste de mercado por el me-

(41) Se describe brevemente por van Eijk y Sandee en *Econometrica*, enero 1959, páginas 9-13.

(42) Se ha publicado una bibliografía amplia por Vera Riley y S. I. Gass (Johns Hopkins Press, 1958). Se resume en nueve páginas al final del libro de Gass citado más arriba.

canismo del precio, en el que los economistas han acostumbrado a confiar para la solución de los que son, después de todo, en buena medida los mismos problemas? Se comprende que hay problemas de "maximización económica" que son inapropiados, por razones sociales o institucionales, para ser resueltos por un proceso competitivo; los problemas del "sector público" que se acaban de mencionar son evidentes ejemplos de esto, pero sin duda hay otros más. Aquí, donde la razón de la no disponibilidad del mecanismo de mercado es no económica, es una ganancia obvia haber encontrado una alternativa. Lo que parece mucho menos claro es la utilidad de la técnica en aquellos casos que tanto han preocupado a los economistas, donde hay motivos económicos para que no funcione el mecanismo de mercado. Parece muy probable que, en esos casos, la técnica de la Programación Lineal también será insatisfactoria.

La teoría competitiva (con frecuencia lo han hecho notar quienes practican la Programación Lineal) da por supuesto que la empresa individual está haciendo máximos los beneficios; lo cual, dicen, significa que el problema de Programación Lineal, inherente a la producción de la empresa, ha sido ya resuelto. Eso, mantienen naturalmente, es mucho suponer. Se ha demostrado mediante experiencias, que cualquier problema complejo de este tipo requiere una técnica para su solución; sin tal técnica, es demasiado esperar que la empresa individual pueda llevar al máximo sus beneficios; ahora que se ha encontrado la técnica, la brecha de la teoría tradicional se puede salvar. No seré yo quien niegue los méritos de este razonamiento como pieza del arte de vender; pero su profundo significado parece revelarse más claramente si es sostenido por otro camino.

La defensa tradicional de la competencia se puede exponer diciendo que es una forma de evitar el problema de Programación Lineal (el macroproblema, podríamos llamarle) que está implicado en la coordinación de la producción en toda la economía. El macroproblema es dividido por el mercado en trocitos, cada uno de los cuales sería demasiado sencillo para justificar la aplicación de una técnica complicada; la coordinación entre los trocitos (que de otra manera tendría que ser establecida por un supertécnico) es proporcionada por el mecanismo del mercado. Si este proceso se desarrollara plenamente, no habría campo para la Programación Lineal dentro de la empresa; pues el problema de ésta se reduciría a optimizar con una serie de restricciones, tan pocas y tan sencillas que la solución sería obvia. En la práctica, naturalmente, la fragmentación raramente se lleva tan lejos como esta argumentación supone; todo lo más, el mercado se hace cargo de una parte del trabajo de coordinación; una parte importante queda por hacer dentro de la empresa. La aplicación de la Programación Lineal a los problemas comerciales continúa, pues, abierta como una útil posibilidad. No obstante, deberíamos preguntar: ¿Por qué la fragmentación no es tan grande como para evitar que ocurra esto? ¿Qué es lo que impide al mercado realizar todo el trabajo?

Indudablemente hay muchas razones; pero seguramente no se debe pasar por alto aquella que, después de todo, más han destacado los economistas: las deseconomías de pequeña escala. Ahora bien, si es cierto que las deseconomías de pequeña escala son la razón económica principal por la que la fragmentación no prosigue hasta el límite, se deducirá que la misma fuerza que restringe la aplicación del mecanismo del mercado también restringirá la aplicación de la técnica lineal. Porque la presencia de economías de escala lleva consigo la ausencia de convexidad: cualificación (que puede ser más o menos seria) a la convexidad que requiere la Programación Lineal.

Uno llega a la conclusión que la Programación Lineal y el mecanismo del precio son fuertemente sustitutivos, tanto en las cosas que pueden hacer como en las que no pueden hacer. Pero el hecho de que dos cosas sean fuertemente sustitutivas, no excluye la posibilidad de que haya un papel para cada una de ellas.

V. ANALISIS DE ACTIVIDAD

Hay un amplio sentido de la expresión: "Análisis de Actividad", en el que incluiría la totalidad de la teoría de la Programación Lineal (como opuesta a la técnica práctica). Yo voy a utilizarla en un sentido más limitado para el que su título resulta, a mi parecer, más apropiado.

Volvamos a la teoría del prototipo (que está sujeta a las reglas de Wald) y concentremos la atención (esta vez) en su interpretación económica. Tal como se ha dado hasta aquí. esa interpretación económica era bastante limitada. La teoría del prototipo se presentó nada más que como una reelaboración del sistema Walras-Cassel; se conservaron los "coeficientes fijos" y otras restricciones básicas, que limitan notablemente la aplicabilidad de aquel sistema. Sin embargo, ya había demostrado von Neumann que hay una forma sencilla que permite prescindir de ellas. Todo lo que se necesita es un ligero cambio del punto de vista.

Es conveniente empezar por un problema bastante especial: el de los productos en oferta conjunta. Está implícito en los supuestos walrasianos que los procesos de producción de los distintos bienes son *independientes*: en el sentido de que la producción de cualquier bien se puede aumentar mediante la absorción de unidades adicionales de factores sin afectar a las ofertas de otros productos, excepto por el hecho de que los factores son retirados de la producción de esos otros bienes. Aunque este supuesto de independencia no es una mala aproximación a la realidad, no es universalmente cierto; por lo tanto, es mejor prescindir del mismo. Y, desde luego, hay varias formas de hacer esto.

Por ejemplo, sería posible observar que las relaciones de oferta conjunta se pueden reducir a ecuaciones (lineales) que liguen las diversas producciones (x); tenemos una técnica normal para tratar con tales ecuaciones. Con su ayuda, por ejemplo, algunas de las x se podrían eliminar; podríamos entonces seguir, con las restantes x como antes. Este es el procedimiento que se sugeriría por lo que ha dicho anteriormente; pero si procediéramos de esa manera, estaríamos planteando el siguiente problema: ¿Cuál es la situación de esas x, que quedan como variables del sistema, una vez que se han eliminado las otras? Son producciones, pero no son todas las producciones —*representan* a ellas mismas y a las otras. Por consiguiente, se ve claramente que será más fácil trabajar, desde el comienzo, con índices de producción, que deben ser distinguidos de las producciones reales de las mercancías y que nos ahorrarán la elección (arbitraria) de qué variables eliminar. De esa idea arranca el Análisis de Actividad.

Una *actividad* es un proceso por el cual ciertas cantidades de *inputs* se transforman en ciertas cantidades de *outputs*. Hay *rendimientos constantes a escala* (este es un supuesto esencial del Análisis de Actividad), de manera que una actividad se puede llevar a cabo a cualquier *intensidad*; aumentando la intensidad, simplemente se aumentan todos los *inputs* y todos los *outputs* en la misma proporción. Así, pues, la actividad k, llevada a cabo con una intensidad unitaria, transforma a_{1k}, a_{2k}, ...a_{Mk} de los factores en α_{1k}, α_{2k}, ...α_{Nk} de los productos; si se efectuara a una intensidad X_k transformaría $a_{1k} K_k$, ... $a_{Mk} K_k$ de los factores en $\alpha_{1k} X_k$, ... $\alpha_{Nk} X_k$ de los productos. (Las a y las α son constantes no negativas que definen la actividad. Naturalmente, cuando no haya oferta conjunta, todas las α menos una serán cero).

Si hubiera R actividades, llevadas a cabo a intensidades (X_k) el *input* total del factor i sería $\Sigma\, a_{ik}\, X_k$ (sumada para todas las k); la producción total del producto j sería $\Sigma\, \alpha_{jk}\, X_k$ (sumada para todas las k). Así V, el valor total de la producción (a precios p_j) sería $\Sigma\, \Sigma\, p_j\, \alpha_{jk}\, X_k$ (sumada para todas las j y todas las k— todos los productos y todas las actividades); esto puede escribirse $\Sigma\, P_k\, X_k$, en que P_k (siendo $\Sigma\, p_j\, \alpha_{jk}$ sumada para todos los productos) no es otra cosa que el valor del *output* de la actividad k cuando se lleva a cabo a una intensidad unitaria. Ahora se puede expresar todo en términos de X. La suma al ser maximizada es $\Sigma\, P_k\, X_k$ (en la que las P, puesto que dependen de las p y α dadas, son constantes dadas). Las restricciones específicas adoptan la forma usual

$$a_{11}\, X_1 + a_{12}\, X_2 + \ldots + a_{1R}\, X_R \leq b_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{M1}\, X_1 + a_{M2}\, X_2 + \ldots + a_{MR}\, X_R \leq b_M$$

con las restricciones de signo usuales. Así, la totalidad de la teoría del prototipo puede ser reinterpretada de forma que se admita la posibilidad de productos conjuntos sin exigir ninguna variación formal (o matemática).

Esta es, a mi parecer, la mejor forma de introducir la "actividad"; pero la idea sería mucho menos importante que lo que es si solamente pudiera tratar con productos conjuntos. Como consecuencia de esta nueva exposición, hay otra extensión, de mucho más alcance, que está a nuestra disposición automáticamente. En la teoría del prototipo mantuvimos la hipótesis de Walras-Cassel de "coeficientes técnicos fijos": que hay exactamente *una* forma de obtener cada producto, de modo que las a_{ij} son todas constantes. Tal vez haya parecido que estábamos dando demasiada importancia a este supuesto (después de todo, fué abandonado hace mucho por los que trabajaban en la tradición de Walras) (43); sin embargo, era conveniente conservarlo con fines de exposición, y no era arriesgado hacerlo así, porque era fácil abandonarlo cuando llegara el momento.

El modelo de Análisis de Actividad que acabo de describir no está, en realidad, maniatado por el supuesto de coeficientes técnicos fijos. Lo mismo que queda abierta la posibilidad, en el prototipo, de que algunos bienes no se produjeran, así queda aquí abierta la posibilidad, por la misma razón exactamente, de que no se empleen algunos procesos po-

(43) Por el propio Walras en su última edición; por Pareto ya en el *Cours* (1898).

sibles (para un producto que se obtiene por otro proceso), de manera que las intensidades de esos procesos sean cero (X). La condición para que esto ocurra se puede deducir inmediatamente de la condición de si $P_k < \Sigma w_i a_{ik}$; es decir, si la actividad no es ventajosa a los precios atribuídos de los factores. Así, mientras que algunas de las actividades no usadas representarán productos que no compensa producir, otras (y probablemente en la práctica éstas serán las más interesantes) representarán métodos de producción que no compensa emplear. De acuerdo con ello, mediante una ampliación suficiente de la gama de actividades posibles, se puede incorporar todo lo que los economistas tienen por costumbre decir sobre la sustitución de los factores.

Hay que subrayar que el modelo resultante es matemáticamente idéntico a nuestro modelo prototipo; las reglas de Wald todavía están en vigor; todo lo que ha ocurrido es que se le ha puesto un traje económico distinto. Sin embargo, mediante ese sencillo cambio, se ha convertido en una teoría general, con un alcance que es semejante al de la teoría paretiana de equilibrio general. El enfoque del Análisis de Actividad no es, al final, tan diferente del enfoque paretiano; sus fuerzas y sus debilidades son casi las mismas. No obtenemos ayuda del Análisis de Actividad para tratar los rendimientos crecientes, la nuez más difícil de abrir con los métodos paretianos; verdaderamente, se podría decir que el Análisis de Actividad depende más completamente de la hipótesis de rendimientos constantes a escala que el paretiano. No hay nada que impida al paretiano explorar el reino de los rendimiento crecientes en el grado muy limitado en que pueden ser explorados por sus métodos; para el analista de actividad, son territorio prohibido. Cada uno está sitiado por la tentación de hacer uso excesivo de los parámetros de precios, que están asociados, por un lado, al supuesto de competencia perfecta y, por el otro, con las hipótesis de convexidad, que equivalen (en la práctica) a casi lo mismo. La posibilidad de los métodos que no compense emplear puede tratarse con cualquier método; donde gana el Análisis de Actividad es en su más explícita atención a la posibilidad de productos que no compense producir y de factores que no compense utilizar. Para cualquier problema en que estas últimas posibilidades no sean importantes (y ese es, seguramente, el caso de la mayor parte de los problemas económicos) no importará qué método se utiliza. Si uno es aplicable, ambos serán aplicables; dando cada uno de ellos los mismos resultados.

Siendo esto así, no es sorprendente encontrar que los problemas particulares para cuya solución el nuevo método tiene una clara ventaja, estén lejos de ser comunes. Verdaderamente puede ocurrir—ya está ocurriendo—que personas que han aprendido a pensar de la nueva manera empezarán por llevar sus problemas en esa dirección, pero generalmente resulta al final que podrían haberlos resuelto también por el método antiguo (44). Esto no es negar que haya cosas que sean más fáciles de advertir si se piensa de la nueva manera; uno se pregunta si Samuelson habría formulado su famoso Teorema de la Igualación del Precio de los Factores tal como lo hizo, si no hubiera estado trabajando al mismo tiempo en el desarrollo del Análisis de Actividad (45). Sin embargo, parece que (aparte de las aplicaciones *Input-Output*, que examinaré en la próxima sección) el éxito principal del nuevo método ha sido el establecimiento de teoremas muy generales, que son valiosos principalmente porque, cuando los tenemos, podemos ir por nuestros caminos antiguos con un mejor conocimiento. El principal de ellos es la prueba de la existencia de un equilibrio competitivo (la solución del problema de Wald) que está contenida en un pasaje muy notable del libro "Dosso" (46). El carácter general de esta prueba (demasiado importante para que se omita en este estudio) puede esbozarse, muy aproximadamente, como sigue.

De las reglas de Wald sobre las constantes—a, b y p (o P)—que se arrastran al Análisis de Actividad, se deduce (como hemos visto) que se puede llevar a un óptimo la producción; hay un conjunto de cantidades de productos (x) que maximiza el valor de la producción para precios dados de los productos (p) y hay un conjunto de precios de los factores imputados (w) que pertenece a ese óptimo. Si la producción estuviera organizada (como sería posible entonces que estuviera organizada) en empresas que trabajaran en competencia perfecta, las ganancias de los factores serían tales que corresponderían a estos precios de los factores imputados. Así, en el lado de la oferta existe equilibrio,

(44) Un buen ejemplo se encuentra en los trabajos de Farrel y Champernowne (*Econometrica*, julio 1954).

(45) Hay una semejanza de familia entre el "Teorema de Precio de los Factores" y el "Teorema de sustitución Imput-Output", debido al mismo autor. (Véase más adelante, pág. 703 del libro.)

(46) Págs. 366-372. Parece que, en su forma final, esta prueba se debe a Solow; pero fué construída por etapas, que se tienen que asociar a los nombres, primero, del propio Wald y luego, de Lionel Mackencie, de Samuelson y de Harold Kuhn. (Hay otra discusión en Baumol, op. cit., págs. 859-865.)

pero nada se ha dicho todavía sobre las demandas de los productos. Ahora hay que introducirlas. Sólo supondremos, en esta fase, que las demandas dependen, de alguna manera, de los precios de los productos y de las ganancias de los factores; entonces, puesto que las ganancias de los factores dependen de los precios de los productos, ambas cosas, las demandas (x') y las ofertas (x) de los productos dependen de los precios de los productos (p) (47). La dificultad consiste en demostrar que tiene que haber algún conjunto de precios de productos que haga las demandas iguales a las ofertas. Esto se ataca de la siguiente manera:

Partiendo de un conjunto arbitrario cualquiera de precios de productos (y precios de factores derivados) tenemos *una* (x') determinada por las funciones de la demanda; pero esta (x') puede no ser factible o, siéndolo, puede no ser eficiente —podría no haber ninguna (p) para la que fuera óptima. Lo que "Dosso" entonces hace es disminuir (o aumentar) todas las x' *en la misma proporción*, hasta que el conjunto resultante de cantidades k (x') se encuentre en la frontera de la región factible. A este k (x') corresponderá un conjunto de precios (p'), siendo un conjunto de precios para el que k (x') es un óptimo. (Generalmente, en verdad, como cuando k (x') está en un vértice, habrá muchos conjuntos tales de precios, pero eso no importa mucho.) Estos precios (p') son bastante análogos a los "precios de oferta" para ser puestos frente a los "precios de demanda" (p) con que empezamos.

Por lo tanto, se ha desarrollado una regla por la cual un conjunto (o conjuntos) de precios de oferta puede asociarse a los precios de demanda dados. En este punto es posible invocar la ayuda de un poderoso instrumento matemático: *el teorema del punto fijo* (48) según el cual (siempre que se satisfaga un cierto número de condiciones que se puede demostrar que se cumplen en este caso), tiene que haber algún (p) que esté incluído entre los conjuntos de (p') que, de esta manera, genera. Una vez que se ha establecido esto, el resto es fácil. Puesto que, ya que las ganancias totales de los factores (que por la "ley de Walras"

(47) Las (p), por supuesto, se tienen que entender como precios *relativos*; si todas las p y, por consiguiente, las w se multiplicaran por el mismo multiplicador, generarían la misma (x) y la misma (x').

(48) La idea general de un teorema de punto fijo está bien explicada en Courant y Robbins, *What is Mathematics?*, págs. 251-255. Sin embargo, hay que notar que lo que se describe allí es el teorema original de Brower, no el teorema ligeramente más complicado de Kakutani, que es el que se necesita para el propósito anterior. Véase el pasaje que se acaba de citar en "Dosso". También Baumol, pág. 859.

se gastan todas) son iguales al valor total de la producción (49), se deduce que a esta (p), $\Sigma\, p\, x' = \Sigma\, p\,(k\, x')$. Puesto que las k son las mismas para todos los productos, $k = 1$. Las cantidades demandadas son cantidades óptimas; las ofertas y las demandas son iguales. Así, el equilibrio competitivo existe.

Lo más interesante de esta prueba para el economista es lo poco que hay que suponer sobre las funciones de demanda (50). Es necesario que haya algún conjunto de demandas, algún (x'), que sea generada por cada (p) y la (w) que le corresponde, pero se necesita poco más (51). No hay nada que corresponda a la "inclinación descendente de la curva de demanda". La explicación de esta omisión bastante sorprendente consiste en que no se ha dicho nada sobre la singularidad del equilibrio. Son perfectamente posibles los equilibrios múltiples. Los supuestos de 'inclinación descendente' suficientemente fuertes (lo que Samuelson llama "el axioma débil de la preferencia revelada"—y yo preferiría describir en términos de ausencia de efectos de renta neta—) sin embargo, demuestran la singularidad. Aquí es donde se introducen. Por supuesto, es familiar, a partir de simples ejemplos, que la presencia de efectos de renta neta pueden conducir a "curvas de demanda de inclinación ascendente" y equilibrios múltiples.

VI. INPUT-OUTPUT

En toda nuestra discusión del análisis de actividad hemos mantenido las reglas de Wald, con la implicación, que llevan consigo, de que

(49) Véase más arriba pág. 984 (del libro).

(50) Es completamente innecesario hacer el supuesto peculiar que hizo Wald en 1934, de que las demandas no bajan hasta cero por altos que sean los precios. Como Kuhn ha demostrado en el trabajo que se ha mencionado anteriormente (*Linear Inequalities*, op. cit.), la razón por la que Wald hizo esa suposición fué que no disponía de la teoría de la dualidad. Daba por sentado que todas las producciones de una lista dada, han de tener precios iguales a los costes; y eso significaba que tenía que excluir la posibilidad de producciones nulas. Aunque admitía la posibilidad de factores con precios nulos, no admitía los otros ceros, que es su dual.

(51) Hay que suponer que las funciones de demanda son continuas —que no hay saltos en la demanda cuando los precios cambian. Esto es necesario, si hemos de insistir en hacer condición de equilibrio que las demandas *igualen* las ofertas. Si estuviésemos dispuestos a contentarnos con una especie de igualdad aproximada, se podría suavizar un poco esta condición de continuidad.

los factores y productos (inputs y outputs) son fundamentalmente cosas distintas. Un análisis de ese tipo pueden tratar la mayor parte de los aspectos de un sistema estático (bajo rendimientos constantes a escala), pero no pueden tratar los productos intermedios, que son *outputs* desde un ángulo e *inputs* desde otro. Lo que hay que suponer sobre tales productos es que han sido "hechos netos" por integración vertical. Sin embargo, no está claro si la producción efectiva es capaz de tal integración sin estar envuelta también en la integración lateral; en todo caso, los productos intermedios, que existen ciertamente, son dignos de estudio en sí mismo. Nadie esperará encontrar una discusión muy seria de la teoría *input-output*, inventada por Leontief como medio para estudiar tales interrelaciones (52) al final de este ya largo estudio; no obstante, ha resultado ser un campo tan atractivo para la aplicación de los desarrollos que hemos estado considerando, que no se puede dejar completamente a un lado.

Es característico del modelo de Leontief que reduce los factores primarios a uno solo: trabajo homogéneo; aparte del trabajo, los *inputs* de cada industria son los *outputs* de otras. Definimos x_i como el *output bruto* de la mercancía *i*, incluyendo la parte que es absorbida como *inputs* de otras industrias y también (pues la semilla tiene que resultar de la cosecha) como *input* en la propia producción de x_i. La cantidad de la mercancía *i* que se necesita como *input* de la *j* (por unidad de esta última) se toma como dada, como los coeficientes correspondientes en el prototipo; no originará confusión que la denominemos a_{ij}, como antes. La demanda del producto x_i, como *input* en la producción de otras mercancías, será entonces $\Sigma\, a_{ij}\, x_j$ (sumadas para todas las *j*); el *output* neto o final es la diferencia entre ésta y el *output* bruto, es decir: $x_i - \Sigma\, a_{ij}\, x_j$. La cantidad de trabajo que se requiere (por unidad de producto) para el producto *j* se denominará sencillamente a_j. Entonces, la demanda de trabajo es $\Sigma\, a_j\, x_j$ (sobre todos los productos).

¿Cuáles son las restricciones bajo las cuales funciona este sistema? Hay, naturalmente, en primer lugar, las restricciones de signo usuales (todas x_i son no negativas). Si suponemos que la oferta de mano de obra (*b*) está dada, tenemos una restricción específica del tipo usual, debido a la limitación de la oferta de ese factor; aquí aparecerá como

(52) *Structure of the American Economy* (primera ed. 1941, 2.ª ed. 1951): *Studies in the Structure of the American Economy* (1953). He hecho uso amplio de los capítulos sobre *Input-Output* en "Dosso" (IX y X); sin embargo, se necesita algún esfuerzo para desenmarañar en estos capítulos los puntos esenciales.

$\Sigma\, a_j\, x_j \leq b$. Sin embargo, también es necesario que los *outputs netos* de los productos sean no negativos. Es posible que toda la producción de una mercancía particular sea absorbida como *inputs* en la producción de otros bienes; pero es inconsistente con el equilibrio estático que sea así absorbido una cantidad mayor que toda la producción. Por lo tanto, tenemos otra serie de restricciones específicas, de la forma $\Sigma\, a_{ij}\, x_j \leq x_i$ (para todas las i) o, escrito en su totalidad:

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + (a_{ii} - 1)\, x_i + \ldots + a_{in}\, x_n \leq 0.$$

Son estas "restricciones de Leontief", como podemos llamarlas, además de la restricción para el trabajo, las que diferencian el sistema de Leontief de los que hemos examinado hasta ahora.

Se puede suponer, por las mismas razones que antes, que las a (de todas clases) son no negativas; pero eso no puede significar que todos los coeficientes en cualquier restricción de Leontief puedan ser no negativos. Si lo fueran, se seguiría inmediatamente (debido al cero en el lado derecho) que los *outputs* de todas las mercancías con coeficiente no nulos tienen que ser cero. Para que el sistema de Leontief sea factible, primero de todo es necesario que el "coeficiente de realimentación" a_{ii} (de cualquier *output* en su propia producción) sea inferior a la unidad. Pero eso significa que hemos de tener un coeficiente negativo en cada una de las restricciones de Leontief; por consiguiente, las reglas de Wald, y son consecuencia —la asegurada factibilidad—, no se aplican.

La situación resultante puede ilustrarse fácilmente mediante un diagrama (figura 3). Si los *outputs* brutos x_1 y x_2 se miden en los dos ejes, la restricción del trabajo aparecerá como una línea descendente de la clase usual (LL); mientras que las restricciones de Leontief aparecerán como líneas ascendentes (debido al coeficiente negativo) pasando por el origen (debido al cero en el lado derecho). La región factible, por consiguiente, está reducida al triángulo O A B. Evidentemente continuará adoptando la misma forma —una pirámide o "cono" con el vértice en el origen— en más de dos dimensiones.

Hay dos cosas que ya son visibles en esta construcción, que es preciso advertir. En primer lugar, la simple condición de que $a_{ii} \leq 1$ (que mantiene las líneas de Leontief ascendentes) no es suficiente para asegurar que exista una región factible. La línea O A podría desviarse fácilmente hacia arriba (o la O B hacia abajo), de manera que desapareciera la región factible. Esto significaría (en el caso de dos artículos) que la cantidad de x_2 absorbida en hacer x_1 era mayor que la que podría reemplazarse absorbiendo toda la x_1 en la industria x_2 (de manera que

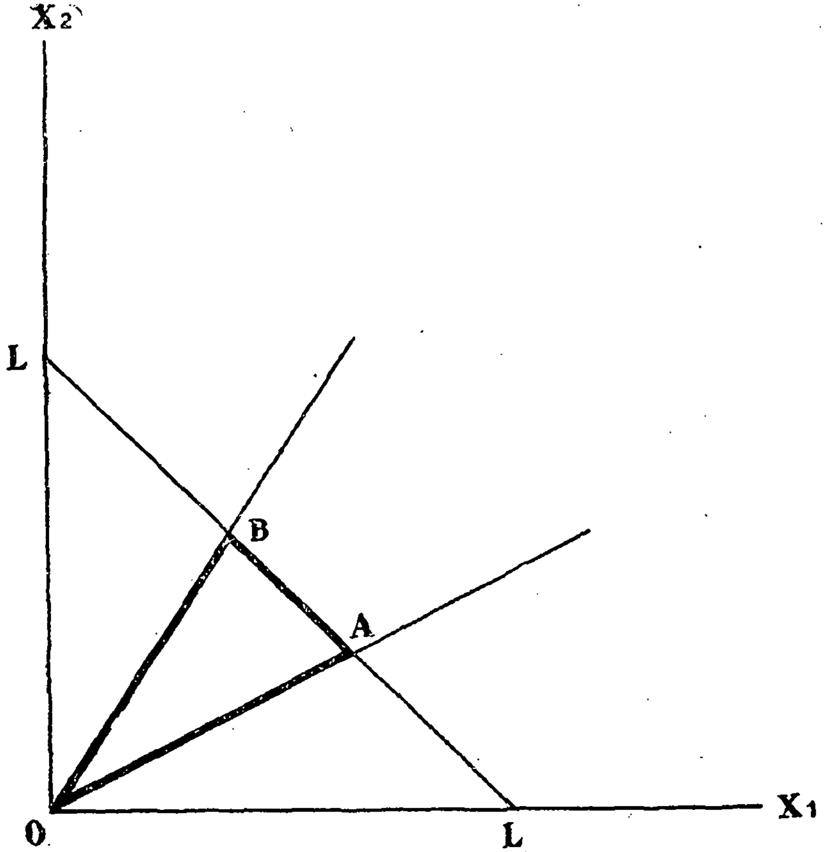

Fig. 3

si la x_1 neta fuera cero, la x_2 neta aún sería negativa); con coeficientes a escogidos aleatoriamente eso sería ciertamente posible, y significaría ciertamente que el sistema no funcionaría. Lo mismo puede ocurrir, naturalmente en formas más complicadas cuando hay más de dos artículos. Las condiciones (sobre los coeficientes de a) para que *no* ocurra se llaman las condiciones de Hawkins-Simons (53); es innecesario escribirlas aquí. Es suficiente observar que algunas de tales condiciones deben ser satisfechas si el sistema de Leontief ha de ser factible.

Segundo, si el sistema es factible, la eficiencia requiere que el "punto" seleccionado esté en aquella parte del límite que está formado por la restricción del trabajo. Desde cualquier otro punto de la región factible, los *outputs* brutos se pueden aumentar proporcionalmente y, por lo tanto, todos los *outputs* netos en la misma proporción. Por consiguiente, hay que esperar que cualquier óptimo (en el sentido usado hasta aquí) se encontrará en esa parte del límite. Pero esto hay que contrastarlo.

Es natural tomar el valor del *output* neto (a precios p dados) como la cosa a maximizar. Pero es fácil demostrar que el valor del *output* neto a precios 'brutos' es el mismo que el valor del *output* bruto a precios 'netos' —interpretándose el 'precio neto' de un producto como el *valor añadido* por unidad de *output* en su producción. Porque

$$V = \Sigma\, p_i\, (x_i - \Sigma\, a_{ij}\, x_j) = \Sigma\, (p_j - \Sigma\, p_i\, a_{ij})\, x_j = \Sigma\, \pi_j\, x_j$$

donde π_j (el 'precio neto') es $p_j - \Sigma\, p_i\, a_{ij}$. Dadas las p y las a, los valores de π están dados. Por consiguiente, es correcto maximizar $\Sigma\, \pi_j\, x_j$ frente a las restricciones.

Como sabemos, un óptimo tiene que estar en un vértice o "entre" vértices. Ahora bien, los vértices de la región de Leontief son: 1) el origen, que —puesto que ahora no tenemos las reglas de Wald para que nos apoyen— no se puede excluir como un óptimo posible; 2) los puntos, tales como A, B del gráfico, que son intersecciones de las restricciones de Leontief con la restricción del trabajo. En el origen, sin embargo, V es necesariamente cero, mientras que en los vértices citados en segundo lugar V necesariamente será positiva (54) (si hay una región factible), de manera que solamente necesitamos considerar estos últimos vértices. Cada uno de esos vértices representará una posición en la que hay un *output* neto igual a cero de todas salvo de una de las mercancías y un *output* neto máximo de la que queda. Los óptimos posibles (todos los cuales, se confirma ahora, tienen que estar en la parte

---

(53) Fueron ideadas por los autores que les han dado nombre, con un poco de dificultad, en *Econometrica*, en el año 1949.

(54) Conservamos la regla de Wald "extra", que las p son no negativas y no todas cero.

de restricción del trabajo del límite o frontera) son promedios ponderados de esos vértices.

Si hubiese *outputs* netos positivos de todas las mercancías, V habría de tener un valor igual en todos esos vértices, de manera que $\Sigma\, \pi_j\, x_j$ debería ser igual en todo el "plano" $\Sigma\, a_j\, x_j = b$. Esto solamente puede ocurrir si π_j mantiene la misma proporción con a_j para todas las mercancías. Podríamos expresar esto así:

$$\pi_j = w\, a_j$$

donde w es fácilmente reconocible como el precio (imputado) del trabajo. Así, pues, tenemos n ecuaciones.

$$p_j - \Sigma\, p_i\, a_{ij} = w\, a_j \text{ (para todas las } j)$$

para determinar los precios brutos (p) en relación con los salarios del trabajo. Solamente a esos precios los *outputs* netos de todas las N mercancías pueden ser positivas.

Se puede preguntar, sin embargo, cómo sabemos que los precios (p) determinados por esas ecuaciones serán no negativos. Resulta que las condiciones para que esto sea así son las mismas condiciones de Hawkins-Simons que habíamos invocado anteriormente para establecer el carácter de factibilidad. Así, pues, dadas estas condiciones, la coherencia interna del modelo de Leontief queda establecida.

Posibilidades de sustitución en los modelos de Leontief

Hay que prestar atención a algunos problemas más. Los precios que se acaban de determinar son independientes de las demandas de las mercancías; cualquiera que sea la variación en las demandas, el punto óptimo tiene que mantenerse en el plano de "restricción del trabajo", de manera que los precios que se acaban de determinar tienen que continuar manteniéndose. Así, a pesar de los "coeficientes fijos" a los que los productos se transforman unos en otros, el hecho de que haya solamente (en último término) un factor escaso mantiene en operación "la teoría del valor trabajo", funcionando el sistema bajo costes constantes. Se deduce de esto que, incluso si los *outputs* netos de algunas mercancías son cero (de manera que son productos intermedios puros, producidos solamente a fin de ser reabsorbidos en el proceso productor) sus "precios netos" deben continuar siendo iguales al valor de sus coeficientes de trabajo: la condición $\pi_j = w\, a_j$ tiene que satisfacerse aun para tales productos. La igualdad no requiere, como parecía a primera vista, que el *output* neto sea positivo; es suficiente que lo sea el *output* bruto.

Hay una consecuencia más notable de la misma propiedad, que ha sido señalada por Samuelson —su "teorema de sustitución" (55)—. No es necesario, en el modelo de Leontief, empezar, como se suponía hasta ahora, con coeficientes técnicos dados —métodos dados de producir las mercancías—. Puede haber una elección de métodos y aún se deducirá que hay un método que se tiene que adoptar para cada producto; el método elegido es independiente de las demandas de los productos. Así, el sistema de Leontief produce bajo costes constantes, incluso si los métodos son variables (en principio).

Esto, como se comprenderá, es nuevamente una generalización de la teoría del valor trabajo. Si todo el trabajo se aplicase directamente a la fabricación de productos terminados (y el trabajo fuera el único factor) podría haber una elección de métodos, pero la eficacia dictaría que se debería usar para cada producto el método más eficiente —como Marx (por ejemplo) sabía muy bien. La elección del método sería independiente de la demanda. Lo que ha demostrado Samuelson es que lo mismo continúa cumpliéndose, en tanto que el trabajo sea el único factor primario de producción, incluso si este se aplica indirecta como directamente. Expuesto de esta forma, su resultado no es sorprendente en modo alguno.

Hay, sin embargo, una excepción a la doctrina clásica, que ha sido familiar desde los tiempos de J. S. Mill. Si algunos de los productos son conjuntos, los precios relativos de los productos conjuntos dependerán de la demanda; entonces sería posible que una variación en la demanda condujera a la sustitución de un método de producción por otro, incluso si el trabajo fuera el único factor primario. El sistema de Leontief excluye tal producción conjunta, de forma que en su sistema no puede surgir tal complicación. Sin embargo, hay que esperar que surja si intentamos extender el principio de Samuelson a casos en los que se admita la producción conjunta (56).

(55) Establecido originalmente en el capítulo VII de *Activity Analysis* (ed. Koopmans).

(56) El punto de las investigaciones amplias de Koopmans y Arrow (capítulos VIII y IX del volumen de *Activity Analysis*) era para aclarar esa excepción.

Puede ser útil demostrar detalladamente cómo es esto. En términos del Análisis de Actividad, el problema se puede plantear de la forma siguiente: hay R actividades capaces de producir las N mercancías (por *input* de algunas y *output* de otras y, naturalmente, por *input* de trabajo). Puesto que las actividades incluyen muchos métodos alternativos posibles de producir las mercancías, se puede suponer que R es mayor —si queremos, mucho mayor— que N. Podemos generalizar nuestra anotación y escribir α_{ik} como el *output* de la mercancía i por la actividad k cuando está funcionando a la intensidad unitaria; los *inputs* se pueden expresar con el mismo símbolo α_{ik}, siendo negativa cuando la mercancía i es un *input*. Aquí denominaremos β_k al *input* de trabajo. Entonces, si X_k es la intensidad de la actividad k, el *output* neto de la mercancía i, en todo el sistema, es $\Sigma\, \alpha_{ik} X_k$. Tenemos que maximizar $\Sigma\Sigma\, p_i\, \alpha_{ik} X_k$, sujeta a las restricciones: $X_k \geqq 0$, para todas las k; $\Sigma\, \alpha_{ik} X_k \geqq 0$, para todas las i; $\Sigma\, \beta_k X_k \leqq b$. Formalmente, el problema es casi el mismo que antes. Puesto que algunas α son positivas y algunas negativas, aún persiste el mismo problema de determinar si existe o no una región factible; para que exista, las α tendrán que ser apropiadas. Nosotros supondremos que lo son.

Siguiendo el mismo razonamiento que antes, sería necesario, si se utilizaran todas las actividades, que $\Sigma\, p_i\, \alpha_{ik} = w\, \beta_k$ para cada actividad. Pero esto nos proporciona R ecuaciones para determinar N precios; si $R > N$, como hemos supuesto, el sistema está superdeterminado (57). Así, en general, no será posible utilizar más de N actividades; el resto tendrá $\Sigma\, p_i\, \alpha_{ik} < w\, \beta_k$ e intensidad cero. La optimización implica la selección de un conjunto particular de no más de N actividades, que van a ser empleadas; un conjunto óptimo de actividades debe satisfacer las condiciones que se acaban de exponer. Si el conjunto óptimo estuviera formado por todo el número de N actividades, los precios a que se pueden emplear estas actividades estaría determinado; cualquier demanda de los productos finales que el sistema sea capaz de satisfacer se puede satisfacer a esos precios y con esas actividades. Ahora bien, si no hay oferta conjunta, se necesitarán N actividades para producir N artículos; este es, por lo tanto, el caso de Samuelson. Pero si hay oferta conjunta, será posible producir N artículos en cantidades positi-

(57) Eso supone (y se supone en todo el razonamiento) que las actividades son "linealmente independientes" —que no estamos incluyendo ninguna actividad que sea una mera combinación de otras actividades. En aplicaciones económicas, esto (creo yo) se puede dar por supuesto.

vas con menos de N actividades; entonces, los precios no están determinados y es posible que, cuando varíen las demandas, las actividades que se utilizan puedan cambiar.

La cuestión se puede ilustrar, y el razonamiento se puede hacer más preciso con ayuda de un gráfico. Supongamos que se estén produciendo dos artículos y que hay tres actividades posibles: N = 2 y R = 3. Midiendo las intensidades de las actividades sobre tres ejes, la restricción de trabajo se convierte en un plano; como hemos visto, el óptimo tiene que encontrarse en ese plano; por lo tanto, supongamos que sea el plano del papel. Las intersecciones de este plano con los planos coordenados aparecerá sobre el papel como un triángulo X Y Z. Las restriccio-

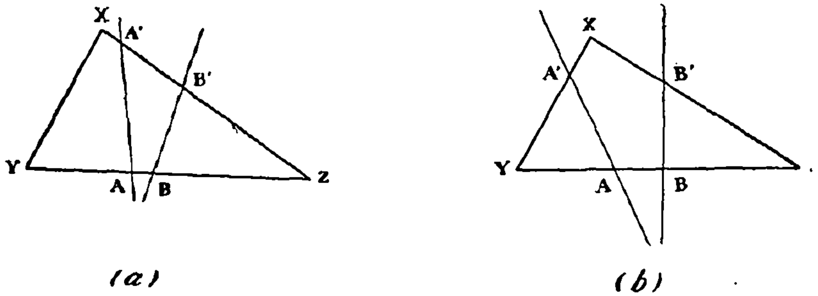

Fig. 4

nes de signo y las restriciones de trabajo les limitan los óptimos posibles a puntos situados dentro o en los lados de este triángulo. Las *dos* restricciones de Leontief (que también aparecerán como líneas rectas: las intersecciones de los planos de Leontief con el plano del trabajo) limitarán todavía más los óptimos posibles. Si han de ser operativas, tienen que cortar el triángulo; entonces hay dos casos principales: en uno de ellos cortan los dos mismos lados (figura 4 (*a*); en el otro, solamente hay un lado que es cortado por ambas (figura 4 (*b*).

Ahora bien, en cualquier caso, por la razón expuesta más arriba, no es posible que las tres actividades se usen en una posición óptima: por lo tanto, el óptimo no puede estar *dentro* del triángulo X Y Z; tiene que estar *sobre* uno de los lados. Por consiguiente, en la figura 4 (*a*) los óptimos posibles se encuentran a lo largo de A B o A′ B′; una de estas porciones será más eficiente que la otra. Si lo es A B, el sistema estará en A cuando la demanda de un artículo sea cero; en B, cuando sea cero la demanda del otro; se pueden combinar (eficientemente) en cualquier proporción desplazándose a lo largo de A B.

En este caso, por lo tanto, se verifica el teorema de Samuelson; pero examinemos ahora la figura 4 (*b*). Los óptimos posibles se encuentran ahora a lo largo de A B o a lo largo de la línea quebrada A′ X B′. Si A B es un óptimo, todo es como antes; pero si el otro es el segmento óptimo, hay una variación en la combinación de actividades a medida que la demanda varía desde un extremo al otro. Pero esta excepción solamente se puede dar si el punto X está en la ruta óptima —si los *outputs* netos positivos de los *dos* artículos pueden lograrse usando solamente *una* actividad. La producción conjunta es, por consiguiente, una condición necesaria para que surja la excepción.

VII. CONCLUSION. LA TEORIA DE LOS JUEGOS

Queda aún un tema que necesita ser examinado antes de que hayamos agotado la lista de cosas que, en sus relaciones una con otra, nos habíamos propuesto examinar. Sin embargo, será conveniente, antes de tocar ese tema, hacer algunas observaciones generales sobre el campo que ya hemos estudiado.

Los métodos de análisis (si verdaderamente hay más de uno) que se han descrito están bastante limitados por la suposición de rendimientos constantes a escala o (tal vez aún más fundamentalmente) por la convexidad que está asociada con la ausencia de economías de escala; sin embargo, sujeto a tal restricción, el campo que tratan es tratado de modo muy completo, más completamente que lo era por los métodos usados anteriormente. Como ya he explicado, no creo que los nuevos métodos necesiten desplazar a los antiguos; verdaderamente se puede decir que uno de los servicios de los nuevos métodos consiste en aportar una justificación del uso de los antiguos que anteriormente no existía. Admitida la convexidad (condición necesaria para que funcionen los nuevos métodos) ahora está completamente *demostrado* que un óptimo general tiene también que ser un óptimo local —que, por lo tanto, las condiciones marginales son suficientes para establecer su carácter de óptimo general—. Por consiguiente, si uno está dispuesto a admitir (como en muchos casos está) que los cambios que uno desea considerar no implican cambio alguno en el número o especificaciones de las clases de artículos que se han de producir o de los recursos que se han de usar, las viejas reglas marginales son todo lo que hay que considerar. Las ocasiones en que el economista desee ir más allá, de manera que tenga que hacer uso de los nuevos métodos en relación con problemas particulares (aunque pudiendo conservar las condiciones de convexidad que le permiten usarlos) son verdaderamente poco frecuentes.

Hay que reconocer, sin embargo (y éste es el punto en el que deseo poner énfasis ahora) que los nuevos métodos son un gran avance sobre los antiguos en la comprensión que proporcionan de la *raison d'être* del mecanismo de los precios. Los métodos matemáticos, bastante inapropiados, que fueron empleados (a todos los niveles de matematización) por la escuela de Cournot y de Walras —y de Marshall— más bien nos perjudicaron en este aspecto. Porque hicieron que se tuviera la idea de que el sistema de precios es exactamente una forma de organizar eficazmente una economía; que es, en un cierto sentido, exterior al problema económico, algo que se introduce desde el exterior. Lo que ha demostrado la teoría lineal —y esto, hablando como un economista teórico más bien que práctico, me parece haber sido su mayor servicio— es que, en tanto que se cumplan los supuestos de convexidad (y aunque he subrayado constantemente que no se cumplen siempre, ciertamente admito que se cumplen, con una buena aproximación, en una gran parte del campo económico), el mecanismo de precios es algo que es inherente. No tenía que ser inventado o introducido desde el exterior. Es algo natural.

Esto es, en verdad, lo que primero percibieron Menger y sus seguidores; pero no pudieron explicar, de una forma que forzara a la comunicación, la verdad que habían visto. Ahora todo se ha puesto en blanco y negro. Se ha demostrado no solamente que un sistema de precios es inherente en el problema de llevar al máximo la producción con unos recursos dados, sino también que algo similar a un sistema de precios es inherente en todo problema de maximización con restricciones. La imputación de precios (o "escaseces") a los factores de producción no es sino una medida de las *intensidades* de las restricciones; tales intensidades siempre están implícitas —la propiedad especial de un sistema competidor es que las saca a la luz y las hace visibles. Mediante su poder de revelar las intensidades (en el sentido fotográfico del revelado) de modo que estén disponibles para su empleo como instrumentos en el proceso de maximización, es como cumple su misión el sistema competitivo.

Sin duda es una conquista muy notable, en muchos sentidos, el haber quitado tanto de la economía y haberlo reducido a un problema de matemática pura; para muchos economistas será más bien una conquista destructura, pero (después de todo) es la clase de cosas que han venido ocurriendo, una después de otra, en las ciencias naturales. No es sorprendente que nos haya ocurrido a nosotros también. Sin embargo, persiste la pregunta: ¿Cuánto se está absorbiendo así de la economía? Si tomamos la famosa definición, dada hace tantos años por Lord Robbins —"la relación entre fines y medios escasos que tienen usos alternativos" (58)— la economía, en ese sentido, queda bien cubierta por la teoría lineal. Sin embargo, se ha demostrado que, en ese sentido, tiene poco que ver con el "comportamiento humano" —una frase que Robbins dejó que entrara reptando. La "lógica de la elección", ahora que se ha matematizado completamente, aparece como pura técnica y nada más— la esencia destilada de una tecnología general.

La economía es, sin duda, una ciencia social. Se interesa por la actuación de seres humanos que no son omniscientes y que no son completamente racionales; que (tal vez porque no son completamente racionales) tienen fines diversos y no totalmente consistentes. Como tal, no puede ser reducida a una pura técnica y puede beneficiarse si se la distingue de una pura técnica; pues podemos decir entonces que se interesa por el uso que puede hacer de la pura técnica el hombre en sociedad. Y eso parece ser una cuestión completamente diferente.

¿Pero lo es? Aquí llego a mi último tema, sobre el que me propongo ser breve. En la Teoría de los Juegos tenemos un tema (evidentemente relacionado con los que hemos estado examinando, por lo menos en el sentido de que usa algunas de las mismas matemáticas) que se ocupa especialmente del análisis del comportamiento cuando los fines son diferentes, ya sea completa o parcialmente opuestos. ¿Hemos de decir que el resto de la teoría económica, que no es pura técnica, sin embargo, es capaz de ser tratada casi de la misma forma por el tema hermano: la Teoría de los Juegos?

No pretendo conocer la respuesta a esta pregunta. No estoy capacitado para responderla; la Teoría de los Juegos abarca ahora un amplio campo y hay demasiado en él que yo no pretendo comprender. Me limitaré a un punto que creo que veo claro, a saber: que la relación de la economía con la Teoría de los Juegos es una cuestión completamente diferente de las que hemos estado examinando. No hay duda de que la

(58) *Nature and Significance of Economic Science*, p. 15. Conviene advertir las credenciales "austríacas" que se presentan en la nota al pie de aquella página.

teoría de la optimización (sea o no economía) es altamente relevante para la economía; bien podría ser que la Teoría de los Juegos fuera también muy relevante; pero una cosa no se deduce de la otra.

Esto vale la pena decirlo, porque es fácil sacar la impresión de que la relación es más estrecha. Una de las formas más claras de demostrar el teorema general de Dualidad (59) (que, hay que recordarlo, no ha sido demostrado en este trabajo) es desarrollarlo como consecuencia del teorema fundamental de la Teoría de los Juegos —el teorema "Minimax" *como* se le llama (60)—. Si se hace esto parece como si la teoría de la optimización estuviera siendo tragada por la Teoría de los Juegos, como si la Teoría de los Juegos no se estuviera simplemente tragando aquella parte de la Economía en que tiene fines obvios, sino que estuviera dispuesta a absorberla toda. Pero estoy convencido de que eso sería un error.

Aunque el teorema "Minimax" se expresa generalmente como un teorema en la Teoría de los Juegos (y, sin duda, esa es su aplicación más fructífera para los matemáticos), no es necesario expresarlo de esa manera. Se puede expresar de una manera más abstracta —como una propiedad pura de los números que están ordenados en una matriz rectangular—. Cualquier matriz de este tipo tiene un 'Minimax' (el mínimo de fila máxima) y un 'maximin' (el máximo de columna mínima). Es fácil demostrar que el 'minimax' siempre tiene que ser mayor o igual que el 'maximin'. Lo que dice el teorema 'Minimax' de von Neumann es que hay un proceso de "ampliación" de la matriz, según el cual la laguna entre el 'minimax' y el 'maximin' (si existiera inicialmente) puede ser tan reducido que acabe desapareciendo. Este proceso de ampliación es sencillamente la adición de nuevas filas y columnas, que son promedios ponderados (en el sentido en que hemos venido usando esa palabra) de las anteriores filas y columnas. Gracias a una ampliación suficiente, se pueden acercar el 'minimax' y el 'maximin'.

Lo que yo deseo subrayar es que esa ampliación es una operación puramente abstracta, a la que se puede dar toda clase de significados que no tengan nada más que una conexión formal uno con otro. Cuando el teorema del Minimax se utiliza como medio de demostrar la Dualidad, la matriz es una matriz de coeficientes técnicos; la ampliación (en una dirección) se consigue variando los *outputs* y, en la otra, variando los

(59) Véase más arriba, pág. 687 (*Del Libro*).

(60) Véase, por ejemplo "Dosso", capítulo 16.

precios de los factores. Cuando se usa en la Teoría de los Juegos, la matriz es una matriz de pagos (pay-offs); la ampliación se lleva a cabo combinando estrategias. La combinación de estrategias no tiene necesariamente nada que ver con el teorema del Minimax; es una de las formas en que el teorema se puede aplicar, y nada más. Que el teorema Minimax se puede utilizar en la teoría de la optimización no demuestra que "Producciones frente a Precios de Factores" sea, en cualquier sentido, un juego.

J. R. HICKS

NOTA BIBLIOGRAFICA

Se ha hecho una labor bibliográfica tan extensa por otros autores sobre los temas cubiertos en este estudio, que no está justificado un apéndice bibliográfico aquí. Las necesidades de los matemáticos y de los técnicos de la Programación Lineal quedan atendidas con la bibliografía de Gass, *Linear Programming* (1958). Una bibliografía más seleccionada, más dirigida a los economistas aparece en "Dosso", *Linear Programming and Economic Analisys,* 1958. Lo demás se ha citado ya.

Para una introducción fácil, ver G. Morton "Notes on Linear Programming" (Económica, 1951); W. J. Baumol, "Activity Analysis in One Lesson" (A. E. R. 1958). Unos valiosos antecedentes se obtienen de la introducción de Koopmans a *Activity Analysis of Production and Allocation,* y del primer ensayo en *Essays on the State of Economic Science* (1957). Después de esto, no queda más que el libro de "Dosso", tan frecuentemente mencionado.

La exposición más sencilla del método Simplex es la de Charnes, Cooper y Henderson, *An Introduction to Linear Programming* (1953), aunque es el método original el descrito, no el revisado que hace uso del "subsidiario" que se menciona en la página 692 (del libro). Si se usa el "Dosso" para este fin, es aconsejable empezar por su capítulo sobre el problema del transporte. Sin embargo, hay que reconocer que la técnica de la programación lineal es una cuestión práctica, como la estadística práctica o la contabilidad práctica; aunque se puede enseñar en clase a estudiantes de una inteligencia media, es una cosa muy cansada para aprenderla por sí sola en un libro.