REFLEXIONES EN TORNO AL ORIGEN DE LA PROGRAMACION LINEAL: EL MODELO DE KANTOROVITCH

Introducción

Al conocerse en el mundo occidental los trabajos del matemático ruso L. V. KANTOROVICH (1) se ha suscitado una controversia sobre la primacía en el descubrimiento de la Programación lineal y su aplicación en la Ciencia económica. Probablemente, si este método matemático no hubiera producido un impacto de tanta resonancia en el ámbito de nuestra ciencia, la cuestión de la primacía no se hubiera puesto nunca sobre el tapete, ya que su esterilidad científica es evidente. Además, tampoco esta discusión tiene una respuesta única y sencilla: cronológicamente, los trabajos de KANTOROVICH preceden a los de sus colegas occidentales. Pero esta ventaja queda compensada en gran medida por el planteamiento que hace el autor ruso, que no analiza sino un caso especial del problema general, estructurado más tarde por los especia-

(1) Los trabajos de L. V. KANTOROVITCH sobre Programación matemática conocidos en Occidente son: *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production*, Universidad de Leningrado, 1939. Traducido al inglés y publicado en Management Science, julio 1960, págs. 366-422. *On the Translocation of Masses*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S., vol. 37, 1942, págs. 199-201. Traducido al inglés y publicado en Management Science, 1958. *On Methods of Analysis of some Extremal Problems in Planning Production*, Doklady Akademii Nauk S. S. S. R., vol. 115, 1957, págs. 441-444. Ha sido traducido al inglés por la Rand Corp., pero no ha sido publicado. En colaboración con M. K. GAVURIN: *The Application of Mathematical Methods in Problems of Freight-Flow Analysis*. Publicada en la obra dirigida por V. V. ZVONKOV: *Collection of Problems Concerned with Increasing the Effectiveness of Transports*, publicación de la Akademii Nauk S. S. S. R., Moscú-Leningrado, 1949, págs. 110-138. En colaboración con V. A. ZALGALLER: *Calculation of a Rational Apportionment of Industrial Materials*, Leningrado, 1951.

listas occidentales, y por la endeblez del método de resolución que propone.

En Occidente, aunque el problema de la maximización de una función lineal sometida a un conjunto de condiciones lineales ya había sido analizado varias veces, se suele señalar el año 1947 como fecha en que se inicia en gran escala su estudio y se logran resultados decisivos. Este año fué testigo de la constitución de un grupo de investigación dirigido por MARSHALL K. WOOD, que incluía a especialistas tan destacados como GEORGE B. DANTZIG, etc., por iniciativa de las Fuerzas Aéreas norteamericanas. Los trabajos de este grupo y de otros investigadores culminaron en 1951 con la publicación de la obra *Activity Analysis of Production and Allocation* (2). En este volumen cabe destacar el trabajo debido a la pluma de DANTZIG dedicado a la exposición de la técnica de solución conocida por el método de "simplex", aunque realmente el hallazgo de este método por DANTZIG se remonta al año 1947 antes citado.

Según indica R. L. ACKOFF (3), antes de esta fecha trascendental ya habían sido seriamente estudiados algunos casos especiales de este problema matemático. Especialmente el problema del transporte, formulado por HITCHCOCK en 1941, había merecido señalado interés. En cuanto al problema denominado de la "dieta alimenticia", fué planteado por JEROME CORNFIELD en un artículo aún sin publicar (4) e intentado resolver por GEORGE STIGLER en 1945. Son aleccionadoras las palabras escritas por STIGLER en esta ocasión, ya que permiten adjudicar la debida importancia a los resultados alcanzados por DANTZIG dos años más tarde: "El procedimiento (de resolución por él aplicado) es experimental porque no parece existir un método directo para hallar el mínimo de una función lineal sometida a condiciones lineales" (5). Pero, a su vez, el ingenio y la perspicacia de STIGLER fueron puestos en evidencia cuando DANTZIG y LADERMANN, con su potente técnica analítica, descubrieron que la solución de aquél distaba ligeramente del óptimo.

---

(2) T. C. KOOPMANS (ed.): *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons. Nueva York, 1951.

(3) R. L. ACKOFF (ed.): *Progress in Operations Research*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1961, págs. 112-113.

(4) R. L. ACKOFF: *Op. cit.*, pág. 112.

(5) G. J. STIGLER: *The Cost of Subsistence*, Journal of Farm Economics,1945, página 312.

La tupida cortina de una ideología política hace difícil conocer con algún detalle el desarrollo de la Programación lineal en la U. R. S. S. y países satélites. A pesar de ello, sí se han podido conocer los hitos fundamentales del mismo. Por ejemplo, el decisivo año 1939, en que L. V. KANTOROVITCH publicó un artículo que más tarde había de ser traducido al inglés con el título *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production* (6). Tres años más tarde escribía *On the translocation of masses* (7). La importancia de ambos escritos ha sido subrayada recientemente por una autoridad en la materia como T. C. KOOPMANS: "Estos dos artículos—escribe—son en verdad documentos sobresalientes en la historia de la Ciencia de la administración, de la Programación lineal y de la Teoría económica en general" (8). El primero de ellos versa sobre un problema de maximización de la producción, pero tanto las matrices de las condiciones como la función objetivo presentan características acusadas que permiten la utilización de una técnica especial de resolución. El segundo presenta, con leves variantes, el modelo del transporte. Más tarde, solo o en colaboración con otros especialistas, publicó buen número de trabajos sobre el mismo tema (9). Pero éstos no nos interesan en este momento, ya que su fecha de aparición es posterior a 1947, cuando el equipo de WOOD consigue los resultados más espectaculares y decisivos de sus esfuerzos. Aunque en su mayor parte ya han sido traducidos al inglés, son prácticamente imposibles de obtener, pues tienen una circulación limitada a los miembros de organizaciones particulares.

Los dos primeros trabajos de KANTOROVITCH fueron ignorados durante largo tiempo incluso en su patria. En la U. R. S. S. fué necesario el transcurso de varios años para que se les reconociera su importancia y trascendencia no tan sólo teórico-matemática, sino también en el terreno de la planificación económica. La causa reside parcialmente en la desconfianza con que muchos economistas soviéticos miraron la aplicación de técnicas matemáticas de planificación. Por ello puede afirmarse sin grave riesgo de error, a pesar de la escasa información, que el des-

(6) L. V. KANTOROVITCH: *Op. cit.*, en la nota 1.

(7) L. V. KANTOROVITCH: *Op. cit.*, en la nota 1.

(8) T. C. KOOPMANS: *A Note about Kantorovitch's Paper: Mathematical Methods of Organizing and Planning Production* en Management Science, julio, 1960, páginas 363-365. La cita corresponde a la pág. 363.

(9) Vid. nota 1.

arrollo de la Programación lineal en Rusia y en Estados Unidos ha seguido caminos distintos: en este último país el paso decisivo se debe a un grupo bastante numeroso de científicos que aunaron sus esfuerzos ante un objetivo común. En Rusia los resultados obtenidos se deben esencialmente al trabajo aislado de una sola persona: el varias veces citado L. V. KANTOROVITCH. No es así extraño que difieran tanto en cantidad como en calidad los frutos conseguidos en uno y otro caso. También el número hace la fuerza. A raíz de la conferencia de la Academia de Ciencias de la República soviética, que tuvo lugar en el mes de abril de 1960, parece que la situación va a cambiar radicalmente en esta nación, ya que las conclusiones en ella adoptadas exigen una intensificación en los estudios de las técnicas matemáticas de planificación (10). Entre los asistentes a esta conferencia estaba KANTOROVITCH.

También el mundo occidental tardó mucho tiempo en conocer en gran escala los dos primeros y trascendentales estudios soviéticos sobre Programación lineal. Su publicación en lengua inglesa se realizó en 1960 y 1958, respectivamente. A pesar de que MERRILL FLOOD conocía con anterioridad su existencia—sin que se pueda precisar si también su contenido—, KOOPMANS tan sólo consiguió los dos artículos en lengua rusa en 1956, y los hizo traducir y publicar en los años antedichos, una vez valorada su importancia.

Este breve bosquejo pone de manifiesto la repetición de un fenómeno frecuente en la historia de la Ciencia. Con total independencia e ignorancia recíprocas, los esfuerzos de varios investigadores se han canalizado casi simultáneamente por una misma dirección. De este hecho pueden extraerse dos conclusiones: la primera es la importancia que el problema matemático de la maximización o minimización de una función lineal sometida a condiciones lineales tiene para la Ciencia económica. Porque si bien es éste un problema esencialmente matemático, tanto KANTOROVITCH como el grupo encabezado por WOOD sin duda lo atacaron por dificultades surgidas en la evolución de la Economía. Fué un problema económico el motor de arranque de las investigaciones matemáticas, hecho que alegraría a SCHUMPETER. En segundo lugar, contrariando todos los principios de eficiencia postulados por los especialistas, la división del trabajo y la transparencia que rigen en el mercado de la investigación son más bien escasas. Probablemente, de

(10) V. DADAYAN y YU. CHERNAK: *Mathematical Methods in Economics*, Management Science, julio, 1961, págs. 323-334.

haber conocido WOOD y su equipo los artículos antes citados de KANTOROVITCH hubieran podido ahorrarse esfuerzos y sinsabores. Igualmente, hubiera sido de desear una colaboración o intercambio de información entre HITCHCOCK y el matemático soviético.

El modelo de KANTOROVITCH

Cronológicamente, es innegable la ventaja que este autor tiene sobre sus colegas occidentales. Pero ya se ha dicho anteriormente que esta precedencia cronológica no merece excesiva consideración. Su importancia se ve paliada por el menor contenido y rigor científico que acompaña a su obra. En su artículo *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production* (11) se dan las siguientes circunstancias:

a) El problema analizado constituye, por sus características matemáticas, un caso especial del modelo general planteado posteriormente por KOOPMANS, DANTZIG, WOOD "et al". Puede afirmarse que está situado a medio camino entre el modelo del transporte y el modelo más amplio hoy en día clásico.

b) Estas características matemáticas permiten la construcción de un método especial de resolución. Este método recurre de hecho a las variables que integran el problema dual, sin que el autor exponga una justificación del método propuesto ni demuestre que la solución con él obtenida es realmente la óptima para los criterios de valor que intervienen en el modelo. Según parece, en alguno de los trabajos publicados más tarde se incluye una fundamentación teórica de la técnica de solución propuesta y aplicada. Pero ISBELL y MARLOW (12) han puesto de relieve que la demostración teórica que KANTOROVITCH efectúa de su método no es totalmente rigurosa. De todas formas, no por ello puede despreciarse la valiosa opinión de KOOPMANS: "La técnica de resolución (de KANTOROVITCH) a primera vista no parece equivalente al método "simplex" de DANTZIG, aunque está incluído con él dentro de una categoría más amplia, puesto que es también un procedimiento iterativo conforme al cual vectores de cantidades y precios son sucesivamente revisados a la luz de los objetivos. Es de desear que se estudien las carac-

---

(11) L. V. KANTOROVITCH: *Op. cit.* nota 1.

(12) J. R. ISBELL y W. H. MARLOW: *On an Industrial Programming Problem of Kantorovitch*, Management Science, octubre, 1961, págs. 13-17.

terísticas de actuación de un procedimiento completamente especificado basado en las indicaciones del autor en relación a los tipos de matrices considerados en este trabajo" (13).

La finalidad que se persigue en este ensayo consiste en dar una versión del método de KANTOROVITCH utilizando teoremas y razonamientos obtenidos por autores occidentales, especialmente en lo referente a la íntima relación entre el problema directo y problema dual. Aun siendo un primer paso, no colma todas las aspiraciones de KOOPMANS, ya que casos especiales, pero importantes, como el de la degeneración, el de infinitas soluciones óptimas, etc., no son objeto de atención.

Considero que un ejemplo es el camino más directo para exponer las características del modelo del matemático soviético. Existen varias regiones agrícolas, de distinta localización geográfica, con una superficie cultivable de q_1, q_2, ... q_n unidades, respectivamente. En ellas se pueden cosechar m productos diferentes. Las condiciones y objetivos técnicos o económicos con que se enfrentan los planificadores exigen que estos bienes se produzcan en las siguientes proporciones relativas: (p_1, p_2 ... p_m). Sea h_{ij} la fracción de la superficie total de la región i cultivada con el producto j. Debe entonces cumplirse

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} = 1 \qquad (i = 1,2 \ldots n)$$

Si m_{ij} representa la cantidad del producto j que se obtiene cuando toda la superficie de la región i se destina a su cultivo, la cantidad z_j del producto j obtenida por toda la unidad de planificación será

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} h_{ij} \qquad (j = 1,2 \ldots m)$$

Las anteriores expresiones deben normalizarse para que se pueda aplicar la técnica de resolución objeto de examen. Entonces

$$a_{ij} = \frac{m_{ij}}{p_j}$$

$$z = \frac{z_j}{p_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{ij}}{p_j} h_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} h_{ij}$$

---

(13) T. C. KOOPMANS: *Op. cit.* nota 8. La cita corresponde a la página 364.

De esta forma, el objetivo último de la planificación consiste en hacer máximo z, cumpliéndose las condiciones

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} = 1 \qquad (i = 1,2 \ldots n)$$

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, h_{ij} \qquad (j = 1,2 \ldots m)$$

Dos son las propiedades de este modelo que merecen ser destacadas. En él no intervienen magnitudes propiamente económicas, sino meramente físicas. No aparecen ni precios, ni costes, ni rentas, etc. En los problemas que han atraído el interés de los investigadores occidentales, por lo menos en los inicios, el objetivo ha consistido siempre en la maximización de alguna variable económica o en su minimización. No cabe duda que la distinta función y origen de los precios en las economías de dirección centralizada frente a las de dirección descentralizada puede explicar en parte la diferencia entre ambos enfoques. Es ello una nueva prueba en favor de la tesis de que la Programación lineal surgió con el propósito fundamental de resolver problemas puramente económicos que no podían someterse al análisis matemático clásico. En este caso, ya no es la Física la guia y el objetivo de la investigación matemática. Segundo, el signo de igualdad que impera en el primer grupo de ecuaciones de condición implica la exigencia del pleno empleo de los recursos. En pura lógica, éste no debería ser un objetivo de la planificación: se pretende maximizar las cantidades físicas, manteniendo las debidas proporciones entre los productos. Y ya se sabe que, matemáticamente, la condición de igualdad es más restrictiva, con las consabidas consecuencias sobre el óptimo, que el signo de desigualdad. La razón de la introducción de aquellos en el modelo por KANTOROVITCH tan sólo podría achacarse a conveniencias de cálculo. Si así fuera, el comportamiento del autor sería erróneo: puede observarse que en este caso la sustitución de los signos de igualdad por signos de desigualdad no tendría influencia alguna sobre el óptimo. Un examen del problema dual, una vez efectuada la siguiente transformación, permite hacer esta afirmación.

Porque, como demuestra KANTOROVITCH, el anterior problema equivale al siguiente:

Maximizar

$$z = \min_{j} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} h_{ij}$$

cumpliéndose

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} = 1 \qquad (i = 1,2 \ldots n)$$

$$h_{ij} \geqq 0$$

Ello implica que, utilizando el esquema tradicional de la Programación lineal, se trata de maximizar z, cumpliéndose

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} = 1 \qquad (i = 1,2 \ldots n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} h_{ij} \geqq z \qquad (j = 1,2 \ldots m)$$

$$h_{ij}, z \geqq 0$$

y forzosamente en el óptimo el segundo grupo de condiciones se cumplirán como igualdades. Si se hubiera utilizado notación matricial se podría observar que la matriz de las ecuaciones de condición del anterior modelo presenta notables analogías con la propia de un modelo del transporte. Efectivamente, cada una de las variables aparece tan sólo con coeficiente no nulo en dos ecuaciones: una, perteneciente al primer grupo, y otra, al segundo. Pero los coeficientes del segundo grupo no son la unidad. Asimismo, los totales de las columnas (en el supuesto que las columnas correspondan a las ecuaciones del segundo grupo) son precisamente la incógnita que se pretende hacer máxima y no datos.

El problema dual del anterior tendría la siguiente estructura:

Minimizar

$$\sum_{i=1}^{n} u_i$$

cumpliéndose

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \geqq 1$$

$$u_i - a_{ij} v_j \geqq 0 \quad (i = 1,2 \ldots n,\ j = 1,2,\ldots m)$$

$$v_j \geqq 0$$

Del examen de los problemas directo y dual, así como del conocimiento de la equivalencia anterior demostrada por KANTOROVITCH, pueden extraerse las siguientes características que habrá de reunir la solución óptima:

1) En el problema directo, z será positiva. En el dual, $\sum_{j=1}^{m} v_j = 1$.
2) El segundo grupo de ecuaciones del problema directo se cumplirán como igualdades. Dicho de otra forma, las variables ficticias x'_j $(j = 1,2 \ldots m)$ serán nulas. Ello significa que $v_j > 0$.
3) Para cada i, por lo menos una variable x_{ij} será positiva. En la interpretación del dual, equivale a que para cada u_i, por lo menos una de las expresiones en que aparece se cumple $u_i = a_{ij} v_j$.
4) Dada la característica 1 y 2, para cada j, por lo menos una x_{ij} será positiva. Según la otra cara de la moneda que el problema dual, para cada v_j, por lo menos una de las expresiones en que aparece se cumple como igualdad, $u_i = a_{ij} v_j$.

El método de solución consiste entonces en resolver el problema directo, pero eligiendo las variables que deben aparecer con valor positivo en las sucesivas soluciones-base mediante el problema dual, con la vista puesta en las diversas características que debe reunir la solución óptima.

Como punto de partida, se elige un vector $v' > 0$ con valores asignados arbitrariamente a sus componentes. Estos valores no precisan cumplir la condición

$$\sum_{j=1}^{m} v'_j = 1$$

puesto que la función objetivo del problema dual no se utiliza nunca a lo largo del cálculo. Entonces la primera solución base del problema directo comprende, para cada i, $x_{ij} > 0$ cuando corresponde a max a_{ij}

v'_j además de m-1 variables ficticias positivas (14). Al no cumplirse la característica 2, y quizás tampoco la 4, es evidente que esta solución base no es óptima.

La modificación se efectúa eliminando de ella una variable ficticia elegida de la siguiente forma: si x'_d es la variable ficticia nula en la primera solución base, se modifica el valor del elemento v'_d del vector del problema dual, asignándole el correspondiente a la expresión

$$v''_d = \min_i \frac{\max\limits_j a_{ij} v'_j}{a_{id}} = \frac{a_{ig} v'_g}{a_{id}}$$

El nuevo vector v'' diferirá del anterior v' tan sólo por el elemento d.

La nueva solución base estará formada por aquellas x_{ij} para las cuales se cumple $\max_j a_{ij} v'_j$. Por la forma de determinar v''_d es evidente que su número será $m + 1$, por lo cual las variables ficticias con valor positivo serán ahora únicamente $n - 2$. Tendrán valor nulo x'_d y x'_g.

Tampoco en este caso la solución base sería óptima. Pero procediendo de forma idéntica en cuanto a las modificaciones en el vector v, llegaría a obtenerse una solución base con $(m + n - 1)$ x_{ij} positivas, además de la z, y todas las demás nulas.

Esta solución sería la óptima, ya que con ella se cumplirían todas las condiciones precisas (15). Es decir, que siguiendo este camino, la primera solución base que cumple el requisito o característica 2 en el problema directo es forzosamente óptima.

Existe un inconveniente que no se ha mencionado. A diferencia de lo que ocurre con el método "simplex" no se tiene nunca la seguridad que la nueva solución base del problema directo será factible, ya que es posible que en ella no todos los valores de las variables incluídas sean no-negativos. La regla que expone el procedimiento a seguir en estos casos es sencilla y no merece ser expuesta.

Posiblemente, el procedimiento de cálculo aquí presentado no es el más económico a la luz de los conocimientos actuales. Quizás fuera más conveniente aplicar el denominado "Duoble-Reverse" (16), u otro de los

(14) Frecuentemente ocurrirá $z = 0$ en la primera base.

(15) Ver, por ejemplo: A. CHARNES y W. W. COOPER: *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Vol. II. John Wiley & Sons. Nueva York, 1961. Páginas 487-488.

(16) A. CHARNES y W. W. COOPER: *Op. cit.* páginas 616-627.

5

conocidos para la resolución de los problemas de transporte debidamente modificado. El método de KANTOROVITCH exige como mínimo *n* iteraciones.

Pero si se tiene en cuenta la fecha en que fué creado, sus méritos son evidentes y ponen de relieve el acierto de KANTOROVITCH. Naturalmente, su exposición por este autor difiere de la que aquí se ha realizado. Las relaciones matemáticas, la equivalencia entre el problema directo y el dual se demostró mucho más tarde. Pero es indudable que el matemático ruso intuyó la existencia de estas relaciones en 1939.

La discusión sobre la primacía no puede ser resuelta. Tampoco este trabajo pretende haberla zanjado. Su único objetivo ha sido aclarar algunos puntos y allanar el camino para poder valorar con más exactitud la primera aportación de KANTOROVITCH a la Programación lineal.