LIBROS

LOS MODELOS ECONOMETRICOS DE LA COWLES COMMISSION

LECCION I

EL MODELO ECONOMETRICO

Sin duda cometeríamos un grave error didáctico si este breve ciclo de lecciones, referidas a los modelos económicos, no lo iniciásemos con una exposición de los elementos que constituyen los modelos, y sólo los fines que los investigadores se proponen alcanzar, adoptándolos en sus investigaciones, de acuerdo con esta idea haremos nuestros razonamientos en esta primera lección.

Siguiendo la terminología adoptada por los miembros de la Comisión Cowles, diremos que un modelo es un conjunto de hipótesis y de informaciones referentes a un sistema de relaciones económicas; con ello se quiere explicar un fenómeno o un grupo de fenómenos. Por otra parte, si de un sistema de relaciones económicas (generalmente expresado en forma de ecuaciones) de forma dada (lineal, exponencial, etc...), y con parámetros a estimar, se pasa a un sistema con parámetros numéricos, se introduce el concepto de estructura.

A propósito de las relaciones económicas, que se expresan en forma matemática y constituyen un modelo, se clasifican, generalmente, en:

I) *Relaciones relativas al comportamiento económico.*—Estas comprenden la amplia clase de las relaciones que constituyen el comportamiento económico de los individuos y de la colectividad en sus actividades económicas, deducidas de las observaciones generales. Así, por ejemplo: La demanda del consumidor para un bien dado, depende (es decir, es una función) de la renta presente

(*) La traducción, autorizada especialmente por el autor, ha sido realizada por Gonzalo Arnáiz Vellando del texto original italiano.

y pasada; del precio del bien, y de los precios de los bienes sustitutivos. O sea:

$$D_a = f\,(R,\ R',\ P_a\,,\ P)\ .$$

En donde: D_a = demanda del bien a; R = renta actual; R′ = renta anterior; P_a = precio del bien a, y P = precio del bien sustitutivo.

II) *Relaciones que consideran las normas institucionales o legales,* que limitan o influencian el comportamiento individual. Por ejemplo, el control del precio, el sistema impositivo vigente.

Expresando una de estas relaciones en términos matemáticos, tendríamos:

$$T = f\,(R)$$

o sea, los impuestos o tasas gubernamentales (T) son cobradas a los individuos o a las empresas en función de sus ingresos R.

III) *Relaciones relativas a la ley tecnológica de transformación.*—Estas expresan la relación física entre el producto obtenido y los factores de producción empleados. Así la cantidad de cosecha depende de la superficie del terreno, de los fertilizantes y de la humedad.

Expresado en otros términos:

$$R = f\,(s, a, h)$$

en donde R = cosecha de grano obtenida; s = superficie del terreno cultivado; a = abonos empleados; h = humedad del terreno (grado de).

IV) *Relaciones contables,* que expresan la identidad cuantitativa entre los fenómenos económicos. Así, por ejemplo: la renta es igual al consumo más al ahorro; la suma de la cantidad vendida de un bien, multiplicando por su precio medio de venta, es igual al volumen del gasto en el bien, etc.

La primera relación contable puede expresarse así:

$$R = C + D$$

en donde R = renta; C = consumo; D = ahorro.

Estos cuatro tipos de relaciones constituyen un conjunto lógicamente completo de elementos para la especificación de las variables y se denominan ecuaciones estructurales, ya que es la estructura fundamental de un sistema económico dado.

En las anteriores relaciones, además, se presentan dos clases de cantidades: las variables (aquellos fenómenos sometidos a examen; como, por ejemplo, son: el ingreso, consumo, precios, inversión, beneficios, etc.) y los parámetros (o coeficientes) introducidos en el proceso del análisis. La utilidad de los parámetros contenidos en las relaciones que describen el comportamiento económico de los individuos, es que expresan la influencia de los factores cuantitativos y no cuantitativos (por ejemplo, psicológicos, sociales, políticos, etc.) en el mundo real, y su medida —como resultará evidente cuando tratemos el problema de su estimación— se obtiene por procedimientos estadísticos. Desde otro punto de vista: mientras en la identidad contable los parámetros están dados por definición, en las relaciones que consideran la ley tecnológica de transformación, o las normas institucionales o legales, la elección y la forma de los parámetros compite a ciencias distintas de la economía.

En lo que se refiere a las variables es necesario distinguir las endógenas de las exógenas, si bien tal vez —como resultará evidente más adelante— la distinción se hace con el fin de poner arbitrariamente ciertos límites al problema. Con objeto de determinar qué variables deben considerarse como exógenas y cuáles como endógenas se siguen, normalmente, los dos principios siguientes: el principio locacional y el causal. El primero considera como exógenas aquellas variables que son total o parcialmente externas al campo económico (como son, por ejemplo, la población, cambios tecnológicos, sucesos políticos, etc.); el segundo, llamado el principio causal —que no siempre conduce al mismo resultado, pero que es el más comúnmente aceptado—, considera como exógenas las variables que influyen en el sistema económico; pero, a su vez, no son influenciadas por él o, por lo menos, quedan influenciadas en una medida no digna de tenerse en cuenta. No se deduce, por tanto, que el modelo se proponga expresar las variables endógenas en función de algunas exógenas.

¿Cómo se construye un modelo econométrico? Como una sencilla descripción y clasificación de los fenómenos concretos sólo es posible si se dispone de algún esquema concebido *a priori*, esto nos aconseja construir el modelo econométrico tomando como base hipótesis extraídas de la teoría económica. Esta, por otra parte, ayuda a la elección de las variables que ocuparán un puesto prominente en el movimiento general de la economía y que se deben incluir en las relaciones.

Evidentemente, el tipo de economía existente en una colectividad dada tiene gran importancia. Así mientras la variable "beneficio" se la considera una variable estratégica en una economía de mercado, tendrá poca importancia en una economía dirigida. Por otra parte, la elección de variables secundarias que hay que incluir en las ecuaciones se deja normalmente a la intuición y tendencia del investigador.

El problema de la elección de las variables, por parte del econometrista, se sigue del hecho de que, con objeto de obtener un sistema de ecuaciones fácilmente resoluble, construye modelos con un número limitado de variables: eligiendo a la luz de la teoría económica las que ocupan un puesto prominente en el fenómeno sometido a análisis. Por otra parte se puede añadir que quizá alguna variable importante se sustituye por otra afín (sólo porque no hay observaciones empíricas disponibles respecto a esta variable importante); aunque se precisa que las variables y los parámetros contenidos en el modelo estén influenciados por las condiciones político-sociales existentes en el período de tiempo observado, es evidente que el modelo abarca sólo una parte de la realidad. En cuanto al número de las variables económicas a incluir en el modelo, dependerá del grado de realismo que el investigador quiera buscar, compatibles con las exigencias de carácter matemático.

Dada la posibilidad que tiene el estudioso de examinar el fenómeno económico, considerando la influencia del tiempo o no, será conveniente estudiar la distinción existente entre modelos económicos estáticos y dinámicos. Un modelo es *estático* cuando todas las variables que intervienen en él se refieren a un instante determinado. De tal forma se elimina la influencia del factor tiempo, y cada variable toma un valor único.

Se define un modelo como *dinámico* si las relaciones que lo forman comprenden variables que se refieren a períodos distintos de tiempo. En este tipo de modelos las variables se dividen en variables sin desplazamiento temporal (y_t, x_t) y variables con desplazamientos temporales (y_{t-n}, x_{t-n} e y_{t+n}, x_{t+n}), en donde n representa el atraso o adelanto, expresado en un número de períodos de igual longitud de los que se divide el tiempo (días, semanas, meses, etc.). Las variables con desplazamiento temporal se denominan *predeterminadas*, haciendo notar que sus valores no se consideran como variables endógenas, sino como exógenas. Para la determinación del desplazamiento temporal existente entre el movimiento de algunas variables, y en el caso que el investigador no disponga de ninguna indicación *a priori* (por ejemplo, por estudios realizados anteriormente), generalmente se seguirán dos criterios distintos: mediante una serie de tiempo, que indica el desarrollo en el tiempo de la variable que se considera, o mediante la aplicación de procedimientos estadísticos particulares (correlación múltiple).

A las distinciones hechas hasta ahora, debemos añadir una más, que el modelo econométrico refleje el comportamiento racional de los individuos o el efectivo. Los estudios que consideran el primer tipo de comportamiento se proponen investigar las mejores decisiones que los individuos deberán tomar, a fin de elegir entre las diversas alternativas, una posición que en una escala dada de valores pueda clasificarse como máxima. Así, por ejemplo, en el caso del consumidor será alcanzar la utilidad máxima y en el caso del empresario hacer máximo su beneficio. Por el contrario, el modelo que describe el comportamiento efectivo describe la conducta de los individuos, como se observa en la realidad. En otros términos, este segundo tipo de modelo se ocupa de las decisiones reales del consumidor respecto a sus gastos: de las circunstancias en que se realiza la inversión, del comerciante en cuanto considera las variaciones de sus "stoks", etc.

Despues de lo dicho vale la pena observar que, en la práctica, no es fácil establecer una distinción entre estos dos tipos de conducta y discriminarlos. De hecho los modelos que describe el comportamiento efectivo se basan, en general, en la hipótesis de que los individuos se comportan racionalmente; por otro lado, el econometrista tiene como objetivo indicar lo que debe hacer el individuo para alcanzar una meta dada; deberá conocer cómo los otros individuos se comportarán en el futuro. Por añadidura se requiere el conocimiento del comportamiento efectivo, ya corresponda a un esquema racional o no.

No debemos dejar de decir que el modelo puede emplearse para investigar caracteres *micro* o *macroeconómicos*, según sea para el estudio del comportamiento de la unidad de consumo o de producción, o del sistema económico como un complejo.

Ahora estamos en condiciones de preguntarnos: ¿Cuál es el objetivo de los modelos econométricos? Ya que lo que habíamos dicho en la introducción —los modelos son instrumentos que nos indican la interdependencia de un número dado de fenómenos económicos— no es suficiente para tener una idea clara de los fines que el econometrista se propone investigar con el uso del modelo.

Construído un modelo econométrico y disponiendo de observaciones empíricas relativas a los fenómenos que se consideran, mediante la aplicación de procedimientos estadísticos particulares, es posible medir los valores de los parámetros que figuran en las relaciones económicas. Tales parámetros reflejan alguna magnitud económica, tales como la elasticidad de la demanda u oferta respecto al precio de un bien dado, la renta disponible, un coste de producción, etc.

Además, los modelos econométricos son también potencialmente útiles para hacer previsiones cautas interesantes para los fines de la política económica. Evidentemente, el problema de la previsión económica es complejo. Brevemente, podríamos decir que la formulación de previsiones dignas de tenerse en cuenta, deberán siempre expresarse en términos de probabilidad y referirse a períodos de tiempo cortos, y posiblemente sólo se conocerá la medida de la variación inmediata de la variable (o variables) incluída en el modelo; o quizá en el caso en que tal variable no se haya considerado de forma explícita, un valor suficientemente bueno de la influencia ejercida por tales variaciones sobre la variable examinada.

Con objeto de poner de manifiesto la utilidad que un modelo econométrico presenta para la confrontación de la política económica, un sencillo ejemplo será suficiente. Consideramos con este objeto los resultados obtenidos por un modelo macro-económico construído recientemente por mí, relativo a la demanda y oferta de alimentos en Italia en el período 1928-1938, que desarrollamos en la lección VIII. Hagamos la hipótesis de que el Gobierno italiano decide sustituir un impuesto del 10 por 100 sobre el precio de las cantidades recibidas de alimentos. Como de la investigación realizada resulta que la elasticidad de la demanda respecto al precio es aproximadamente — 0,0252, deduciremos que introduciendo un impuesto del 10 por 100 la cantidad demandada de bienes alimenticios probablemente disminuirá en un 0,25 por 100. Este resultado puede desearse o no, según sean los fines que se deseen alcanzar con tal política.

En circunstancias dadas podríamos considerar la disminución de los bienes alimenticios insignificante respecto al beneficio conseguido por el Estado con la recaudación de tal impuesto. Por otra parte, la disminución en el consumo puede ser una seria amenaza al estado general de salud de la población, si la cantidad de alimentos consumida antes de la instauración del impuesto era baja.

LECCION II

EL MODELO NO ESTOCASTICO

a) *El modelo estático.*

Debemos ahora realizar una distinción entre modelo *estocástico* y *no estocástico*. Los definiremos brevemente diciendo que la diferencia entre estos dos tipos de modelos es debida al hecho de que mientras en el modelo no estocástico se supone la existencia de variables que satisfacen exactamente las ecuaciones económicas; en los estocásticos no se admite esta posibilidad, por dos motivos diferentes. En primer lugar, porque el estudioso incluye solamente alguna de las variables que determinan el comportamiento del individuo; y además por la poca acuracidad con que generalmente se miden y realizan las observaciones empíricas, este último motivo es secundario.

Con estas premisas, a título de ejemplo, damos un modelo macroeconómico no estocástico, con el fin de indicar cómo se realiza la construcción de un modelo, además de su funcionamiento. Con objeto de facilitar su compresión hemos preferido elegir un modelo en el cual todas las variables vienen referidas a un instante determinado. En otros términos, como prescindimos de la influencia que el factor "tiempo" puede ejercer sobre el fenómeno económico que observamos, nuestro modelo será no estocástico y de naturaleza *estática.*

Consideremos una colectividad operando en un sistema dado en la cual la vida económica no viene influenciada por las actividades del Gobierno y compuesta de dos categorías económicas de individuos: "trabajadores" e "inversores".

Naturalmente, tal hipótesis —como alguna otra que introduciremos a continuación en nuestra exposición— difícilmente puede encontrarse en la realidad. Sin embargo, su introducción permitirá simplificar notablemente el examen del fenómeno que consideramos; es decir: el consumo, la inversión, el beneficio, el salario y la producción de la colectividad hipotética.

Indicaremos por S y P, respectivamente, el salario percibido por los trabajadores y el beneficio obtenido por los que invierten. Llamaremos C al valor del consumo total de la colectividad. Además recordaremos que la cantidad de bienes consumidos varían al cambiar la renta a disposición del consumidor; es decir, en nuestro caso al variar los sueldos y beneficios, ya que en períodos de prosperidad, el consumidor aumenta sus adquisiciones; mientras que en períodos de depresión el consumo desciende. Si aceptamos la hipótesis —que como es evidente biene dada por la teoría económica— podemos escribir la siguiente relación lineal (ecuación), que refleja el comportamiento económico del consumidor de la colectividad:

$$C = \alpha_1 S + \alpha_2 P \qquad [1]$$

en donde los parámetros α_1 y α_2 indican, respectivamente, la propensión al consumo de los trabajadores y empresarios; es decir, la parte de la renta gastada en bienes de consumo por parte de las dos categorías de individuos.

Consideremos la inversión total efectuada por los componentes de la colectividad, en un determinado instante que indicaremos por I. Generalmente, el volumen de la inversión dependerá de varios factores, algunos de naturaleza económica y otros de naturaleza técnica. Entre los primeros el beneficio, el tipo de interés y el volumen del paro son los que ejercen mayor influencia; mientras que entre los elementos de orden técnico predomina el grado de la capacidad colectiva utilizada y las nuevas posibilidades que ofrece la técnica industrial.

Estos últimos elementos tendrán para nosotros escasa importancia, ya que la hipótesis estática que hemos introducido presupone que el sistema económico está en equilibrio. Respecto a los factores de naturaleza económica que mayor influencia tienen sobre el volumen de inversión, admitiremos para nuestro modelo que es exclusivamente el beneficio que indicaremos por P. por lo tanto, si llamamos β a la propensión a la inversión, tendremos la relación:

$$I = \beta P \qquad [2]$$

que expresa el comportamiento económico de los inversionistas y endonde β es el tanto de beneficio no gastada en bienes de consumo y destinada a la inversión.

Volviendo a examinar el fenómeno del salario que indicaremos por S, podríamos suponer que entre él y la producción (que indicaremos con la letra R) existe una relación directa; en virtud de la cual, los salarios aumentarán con el crecimiento de la producción y viceversa. En virtud de esta hipótesis tendremos:

$$S = \gamma R \qquad [3]$$

en donde γ es un coeficiente que indica la parte de la producción que se dedica a trabajo.

Naturalmente, la anterior relación no reproduce nada más que en una mínima parte la realidad del fenómeno. En efecto, el volumen del salario depende de muchos factores: productividad, mano de obra, costo de vida, estado de la ocupación, potencia de los sindicatos, legislación, etc.

Además de las hipótesis formuladas anteriormente resulta que la producción viene determinada por el consumo y la inversión, pudiendo escribirse la siguiente relación de tipo contable:

$$R = C + I. \qquad [4]$$

Resumiendo, nuestro modelo está compuesto de las siguientes relaciones; de las cuales, las tres primeras —tomando como base la clasificación de la pág. 1—, son de comportamiento:

[1]	$C = \alpha_1 S + \alpha_2 P$	o sea, el consumo depende de la renta puesta a disposición de las dos categorías económicas de individuos, en los cuales por convenio habíamos dividido la colectividad.
[2]	$I = \beta P$	Que expresa que la inversión realizada en un instante determinado, es función del beneficio.
[3]	$S = \gamma R$	El salario dado a los trabajadores es función del volumen de la producción.
[4]	$R = C + I$	El valor de la producción es la suma del consumo y la inversión.

Antes de nada, debemos precisar que en el modelo anterior habíamos considerado como variables endógenas: el consumo, el salario, la inversión y el beneficio, mientras la variable exógena era la producción.

En cierto modo indicamos cómo se construye un modelo econométrico, y de cuanto habíamos expuesto resulta evidente que un modelo no es otra cosa que la formulación en términos matemáticos de *observaciones* concretas y de *hipótesis* sugeridas por la realidad o por el razonamiento.

No se debe creer que, formulado un modelo, la labor del econometrista ha terminado. En vez de esto, como habíamos dicho en la lección precedente, deberá adaptar el modelo a los datos estadísticos y hacerlo *operativo* como se dice en metodología, debe sustituir las variables comprendidas en el modelo por las observaciones empíricas que posee, y estimar los valores de los parámetros. Pero para realizar una estimación de los parámetros contenidos en la ecuación estructural es necesario someter a las observaciones empíricas ya dichas, a elaboraciones estadísticas especiales que serán expuestas en las lecciones VI y VII. Por tanto, no pudiendo ahora realizar, como se hace en la práctica, la medida de los coeficientes contenidos en las relaciones económicas, atribuiremos a éstos valores hipotéticos, con objeto de mostrar el funcionamiento del modelo construído. En otros términos, en el presente modelo consideraremos las variables endógenas como incógnitas y los parámetros como cantidades conocidas; mientras, en la realidad, se deben determinar los valores de los parámetros de las observaciones empíricas de las variables, ya sean endógenas, ya exógenas.

Como ejemplo supongamos, pues, que con los ya dichos métodos estadísticos determinamos que la cantidad de salarios cobrados por los obreros se gasta íntegramente en bienes de consumo; que una parte de los beneficios, por ejemplo el 70 por 100, se gasta mientras el otro 30 por 100 se invierte, y que el trabajo representa el 85 por 100 del valor de la producción. Frente a tales hipótesis los parámetros resultantes en el modelo tomarán los siguientes valores:

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 0{,}7 \qquad \beta = 0{,}3 \qquad \gamma = 0{,}85\,.$$

Sustituyendo en las relaciones [1], [2] y [3] los valores asignados a los parámetros α_1, α_2, β, γ, tendremos:

$$C = S + 0{,}7\ P \qquad [1a]$$
$$I = 0{,}3\ P \qquad [2a]$$
$$S = 0{,}85\ R \qquad [3a]$$
$$R = C + I\,. \qquad [4a]$$

Para resolver el susodicho sistema de ecuaciones, que deberá ser determinado, deberemos poner las cuatro variables endógenas: el beneficio, el consumo, la inversión y el salario (que hemos designado por P, C, I, S) en función de la variable exógena, es decir, de la producción (R). Supondremos que su valor es igual a 130.

Por tanto, sustituyendo en la [4a] las variables C e I por las cantidades que figuran en la ecuación [1a] y [2a], tendremos:

$$R = C + I = S + 0{,}7\,P + 0{,}3\,P = S + P \qquad [5a]$$

De aquí podemos obtener el valor de las cuatro variables endógenas. En efecto, la [3a] indica que:

$$S = 0{,}85\,R$$

y como el valor de la producción en nuestra colectividad se ha hecho igual a 130, la variable salarios tomará el valor 110,50:

$$S = 0{,}85 \,.\, 130 = 110{,}50 \,.$$

En otros términos, de la anterior relación se deduce que para una producción de 130 el montante del salario correspondiente a los trabajadores es 110,50.

Por otra parte, de la [5a]:

$$R = S + P$$

se deduce:

$$P = R - S$$

y sustituyendo en lugar de las variables "producción" y "salario" sus valores respectivos, obtendremos:

$$P = 130 - 110{,}50 = 19{,}50$$

lo que significa que la inversión ha devuelto en forma de beneficio un valor igual a 19,50.

Y de aquí:

$$I = 0{,}3\, P \qquad [2a]$$

tendremos que

$$I = 0{,}3 \,.\, 19{,}50 = 5{,}85$$

o sea, dada una producción de valor igual a 130, el montante total de beneficio recibido por los inversionistas (el neto de las pagadas para la adquisición de bienes de consumo) y empleado en la producción (es decir, el montante de la inversión efectuada en la colectividad hipotética) toma el valor 5,85.

Además, sustituyendo en [1a]

$$C = S + 0{,}7\, P$$

las variables salario y beneficio, por sus valores respectivos obtenidos anteriormente, tendremos:

$$C = 110{,}50 + 0{,}7 \,.\, 19{,}50 = 124{,}15 \,.$$

La relación anterior indica la parte alícuota del valor de la producción (124,15) que es gastada por las dos categorías económicas: trabajadores e inversionistas en la adquisición de bienes de consumo.

De aquí se puede deducir que habiendo sido destinada al consumo un elevado tanto por ciento del valor de la producción (95,50 por 100), la colectividad hipotética probablemente será muy pobre. En efecto, el tener una alta propensión al consumo es una característica *normal* de las colectividades pobres.

LECCION III

EL MODELO NO ESTOCASTICO (continuación)

b) *El modelo dinámico.*

Entre las hipótesis simplificadoras voluntariamente introducidas en la exposición de la lección precedente, con el fin de hacer más fácilmente comprensible la construcción y funcionamiento de un modelo econométrico dado, figuraba la de ser estático, aunque sabíamos que, en realidad, el sistema económico concreto no se encuentra nunca en un estado de equilibrio, sino en movimiento incesante.

Queriendo acercarnos a la realidad, debemos considerar ahora el fenómeno económico bajo el aspecto dinámico. Esto es lo que nos proponemos hacer en esta lección, en la cual introduciremos el factor "tiempo"; es decir, consideraremos relaciones económicas en períodos de tiempo, que tienen igual longitud.

Esto, en efecto, no es suficiente para hacer dinámico un modelo. Para que esto sea así es necesario —como habíamos puesto de manifiesto en la primera lección a propósito de la diferencia existente entre el modelo estático y dinámico— que por lo menos en una relación aparezca una variable endógena en dos períodos distintos de tiempo. Por esto e intentando utilizar el modelo expuesto anteriormente, supondremos —nueva hipótesis— que el valor de la inversión efectuada en el período t es función no sólo del beneficio realizado en el tiempo, sino también del conseguido en el período precedente ($t-1$).

Después de esta especificación el nuevo modelo quedará constituído por las siguientes ecuaciones:

[I] $C_t = \alpha_1 S_t + \alpha_2 P_t$	El consumo depende de la renta puesta a disposición de los trabajadores e inversionistas.
[II] $I_t = \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1}$	La inversión total efectuada en el tiempo *t* es función del beneficio conseguido en el período *t* y en el período anterior.
[III] $S_t = \gamma R_t$	El salario cobrado por los trabajadores depende del volumen de la producción.
[IV] $R_t = C_t + I_t$	El valor de la producción es igual a la suma del consumo e inversión.

Por ser P_{t-1} una variable predeterminada se la considera una variable exógena.

Por lo tanto, en el nuevo modelo tendremos cuatro variables endógenas: consumo, C_t; salarios, S_t; beneficios, P_t; inversión, I_t, y dos variables exógenas: producción, R_t, y beneficio del período precedente, P_{t-1}.

Como en el caso estático, haciendo que los parámetros contenidos en las ecuaciones tomen los valores:

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 0{,}7 \quad \beta_1 = 0{,}1 \quad \beta_2 = 0{,}2 \quad \gamma = 0{,}85$$

lo que equivale a decir quo salario total pagado a los trabajadores se gasta totalmente en la adquisición de bienes de consumo ($\alpha_1 = 1$); una parte del beneficio de los inversionistas se gasta ($\alpha_2 = 0{,}7$); el resto se invierte ($\beta_1 = 0{,}1$, $\beta_2 = 0{,}2$); a los trabajadores corresponde el 85 por 100 del valor de la producción ($\gamma = 0{,}85$).

Volvamos al modelo compuesto por las ecuaciones [I-IV] y sustituyamos los parámetros por sus valores respectivos. Tendremos:

$$C_t = S_t + 0{,}7\,P_t \qquad [Ia]$$
$$I_t = 0{,}1\,P_t + 0{,}2\,P_{t-1} \qquad [IIa]$$
$$S_t = 0{,}85\,R_t \qquad [IIIa]$$
$$R_t = C_t + I_t\,. \qquad [IVa]$$

Llegados a este punto, antes de determinar los valores de las cuatro variables endógenas (P_t, S_t, I_t, C_t) es necesario transformar el sistema [Ia] — [IVa] en otro en el cual todas las variables endógenas se expresan en función de las variables exógenas (producción y beneficio realizado en el período precedente). Esto no es más que hallar la forma reducida del modelo dado.

Para realizar esto sustituyamos en la [IVa] las variables "consumo" e "inversión" por las cantidades indicadas en [Ia], [IIa] y [IIIa]. Obtendremos:

$$R_t = C_t + I_t = 0{,}85\,R_t + 0{,}7\,P_t + 0{,}1\,P_t + 0{,}2\,P_{t-1}\,. \qquad [IVa]$$

Efectuando operaciones:

$$0{,}15\,R_t = 0{,}8\,P_t + 0{,}2\,P_{t-t}$$

que nos permite expresar la variable endógena "beneficio" en función de las variables exógenas P_t y P_{t-1}:

$$P_t = \frac{0{,}15\,R_t - 0{,}2\,P_{t-1}}{0{,}8}\,.$$

Además de la [Ia] se deduce que:

$$C_t = S_t + 0{,}7\,P_t \qquad [Ia]$$

sustituyendo las variables endógenas "salario" y "beneficio", las expresiones serán:

$$C_t = 0{,}85\,R_t + 0{,}7\,P_t = 0{,}85\,R_t + 0{,}7\,\frac{0{,}15\,R_t - 0{,}2\,P_{t-1}}{0{,}8} =$$

$$= 0{,}85\,R_t + \frac{0{,}105\,R_t - 0{,}14\,P_{t-1}}{0{,}8}\,.$$

Por último, sustituyendo en:

$$I_t = 0{,}1\,P_t + 0{,}2\,P_{t-1} \qquad [Ia]$$

la variable P_t por su expresión calculada más arriba, tendremos:

$$I_t = 0{,}1\,\frac{0{,}15\,R_t - 0{,}2\,P_{t-1}}{0{,}8} + 0{,}2\,P_{t-1} =$$

$$= \frac{0{,}015\,R_t - 0{,}02\,P_{t-1}}{0{,}8} + 0{,}2\,P_{t-1}.$$

Puestas ya, todas las variables endógenas en función de las exógenas, con objeto de indicar la variación en el tiempo de las variables económicas consideradas: "consumo", "inversión", "beneficio", "beneficio del período precedente", "salario" debemos asignar a la variable exógena "producción" valores hipotéticos y sucesivos en el tiempo, como por ejemplo:

$R_0 = 100$	$R_6 = 111$
$R_1 = 108$	$R_7 = 106$
$R_2 = 120$	$R_8 = 109$
$R_3 = 131$	$R_9 = 118$
$R_4 = 129$	$R_{10} = 130$
$R_5 = 121$	

Volviendo a las expresiones relativas a las cuatro variables endógenas anteriores, es decir:

$$S_t = 0{,}85\,R_t$$

$$P_t = \frac{0{,}15\,R_t - 0{,}2\,P_{t-1}}{0{,}8}$$

$$C_t = 0{,}85\,R_t + \frac{0{,}105\,R_t - 0{,}14\,P_{t-1}}{0{,}8}$$

$$I_t = \frac{0{,}85\,R_t - 0{,}02\,P_{t-1}}{0{,}8} + 0{,}2\,P_{t-1}$$

y sustituyendo en ellas los valores asignados a la variable exógena "producción", y desde el tiempo uno para el beneficio realizado en el período precedente. Tendremos, para los diversos períodos de tiempo, los siguientes valores:

Tiempo cero:

$$S_0 = 0{,}85\, R_0 = 0{,}85 \,.\, 100 = 85\,.$$

O sea, dada una producción igual a 100 los trabajadores de nuestra colectividad han cobrado en forma de salarios 85.

$$P_0 = \frac{0{,}15\, R_0}{0{,}8} = \frac{0{,}15 \,.\, 100}{0{,}8} = 18{,}75$$

es decir, en el tiempo cero, los inversionistas de nuestra colectividad han recibido a título de beneficio 18,75.

$$C_0 = 0{,}85\, R_0 + \frac{0{,}105\, R_0}{0{,}8} = 0{,}85 \,.\, 100 + \frac{0{,}105 \,.\, 100}{0{,}8} = 98{,}125$$

en otras palabras, el consumo de la colectividad es el 98,125 por 100 del valor de la producción en el período correspondiente de tiempo:

$$I_0 = \frac{0{,}015\, R_0}{0{,}8} = \frac{0{,}015 \,.\, 100}{0{,}8} = 1{,}875$$

es decir, dado un nivel productivo de 100 en el tiempo cero, la inversión resultante es 1,875.

En el tiempo uno:

$$S_1 = 0{,}85\, R_1 = 0{,}85 \,.\, 108 = 91{,}80$$

es decir, la anterior relación indica que a un valor de 108 en la producción, la parte correspondiente a los trabajadores es de 91,80:

$$P_1 = \frac{0{,}15\, R_1 - 0{,}2\, P_0}{0{,}8} = \frac{0{,}15 \,.\, 108 - 0{,}2 \,.\, 18{,}75}{0{,}8} = 15{,}687$$

que nos dice que en el tiempo uno los inversionistas han recibido en forma de beneficio un valor igual a 15,687:

$$C_1 = 0{,}85\,R_1 + \frac{0{,}105\,R_1 - 0{,}14\,P_0}{0{,}8} = 0{,}85\,.\,108 +$$

$$+ \frac{0{,}105\,.\,108 - 0{,}14\,.\,18{,}75}{0{,}8} = 102{,}694$$

lo que equivale a decir, que dada una producción de 108, el nivel del consumo total de nuestra colectividad tomará el valor 102,694:

$$I_1 = \frac{0{,}015\,R_1 - 0{,}02\,P_0}{0{,}8} + 0{,}2\,P_0 =$$

$$= \frac{0{,}015\,.\,108 - 0{,}02\,.\,18{,}75}{0{,}8} + 0{,}2\,.\,18{,}75 = 5{,}308$$

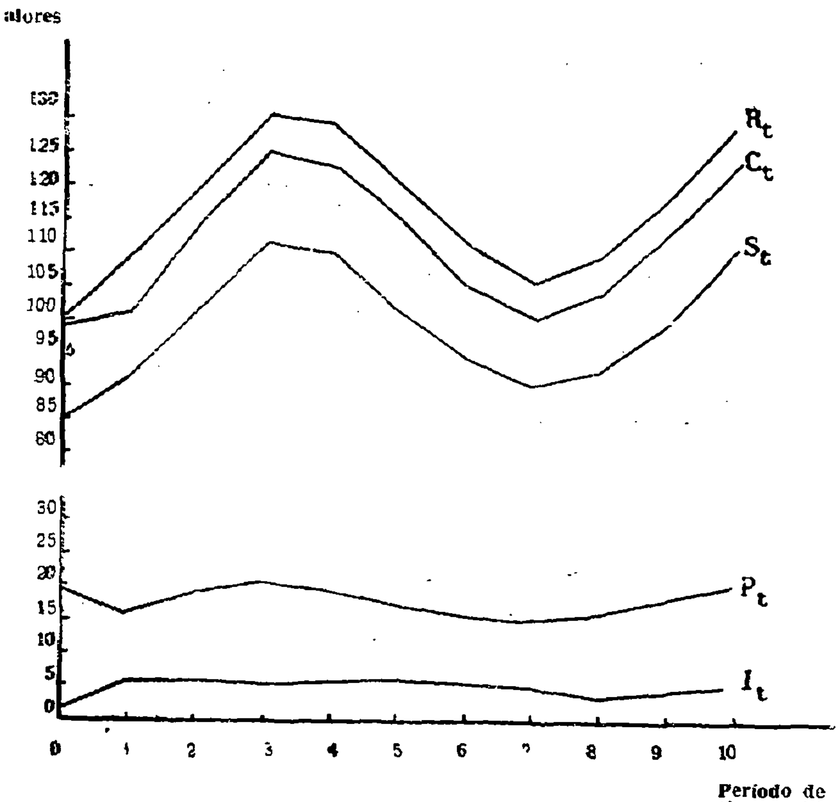
es decir, que el volumen del coeficiente de inversión en el tiempo uno resulta igual a 5,306.

Continuando las sustituciones en las relaciones básicas de los valores que las dos variables exógenas: "producción" y "beneficio han tenido en el período precedente", a partir de los períodos sucesivos al primero, tendremos los valores relativos de las variables endógenas, que da lugar a la tabla siguiente:

Desarrollo en el tiempo de las variables contenidas en el modelo

t	R_t	S_t	P_t	C_t	I_t	P_{t-1}
0	100	85,—	18,750	98,125	1,875	0
1	108	91,80	15,687	102,694	5,306	18,750
2	120	102,—	19,062	114,469	5,531	15,687
3	131	111,35	20,641	125,799	5,201	19,062
4	129	109,65	19,420	123,245	5,755	20,641
5	121	102,85	17,527	115,120	5,880	19,420
6	111	94,35	15,957	105,550	5,450	17,527
7	106	90,10	15,493	100,945	5,055	15,957
8	109	92,65	16,448	104,163	4,837	15,493
9	118	100,30	18,251	113,076	4,924	16,448
10	130	110,50	20,262	124,684	5,316	18,251

El desarrollo en el tiempo de las cinco variables (excluímos la P_{t-1} ya que sus valores son iguales a los de P_t retardados en un período) que constituyen nuestro modelo, puede también representarse en un diagrama. La figura adjunta reproduce las variaciones ocurridas en el sistema económico por nosotros considerado, que desde luego está muy simplificado.



¿Qué conclusiones podríamos extraer de los valores tomados por las cinco variables dadas en la tabla o el diagrama? Si bien su importancia práctica es dudosa, a causa de las hipótesis excesivamente simplificadoras (y por lo tanto irreales) introducidas en el modelo, un examen de ellas revela que:

1) La variable "producción" (R_t), "salario" (S_t), "consumo" (C_t) presentan una marcha idéntica, debido —es bueno no olvidarlo— a la relación directa existente entre las variables formulada en la segunda lección.

2) La marcha de la variable "beneficio" (P_t) no difiere de los valores tomados por esta variable, a partir del punto siguiente, al tiempo uno. Es decir, cuando se ha hecho la hipótesis de que en nuestra colectividad el beneficio depende de los valores de la producción en el correspondiente período y del montante conseguido en el período precedente.

3) Cuanto habíamos dicho a propósito de la marcha de la variable "beneficio" vale también para la "inversión". Si añadimos que la cuasi estabilidad en el tiempo de los valores I_t se deduce del hecho de que un tanto por ciento casi despreciable del beneficio conseguido en el período de tiempo considerado y en el anterior está destinado a la inversión.

LECCION IV

EL MODELO ESTOCASTICO

Sabemos que las ecuaciones que constituyen los modelos no estocásticos están consideradas como exactas por los estudiosos que las emplean, aunque no lo son (exceptuando la que expresa una identidad contable, que naturalmente lo será); no obstante venir expresadas en una forma correcta, capaces de inducir al lector a considerarlas como exactas.

Por experiencia sabemos que las tentativas de establecer relaciones exactas entre las variables económicas observadas han fallado. Los hechos generalmente están en desacuerdo, unas veces más, otras menos, con cualquier proposición exacta *a priori;* particularmente en economía, donde el estudioso considerará una parte del movimiento que determina el comportamiento de los individuos y los procedimientos estadísticos no siempre son perfectamente adaptables a los sucesos económicos.

¿Cuáles son, pues, las causas que impiden la formulación de ecuaciones económicas exactas?

Una referencia a ese hecho se hizo —como se recordará— en la iniciación de la segunda lección, a propósito de la distinción operada entre el modelo estocástico y no estocástico. Es decir, la dificultad de poseer en economía relaciones exactas deriva, en primer lugar, de la existencia de errores de observación y de medida, a las que generalmente están sujetas las observaciones empíricas, debidas, en parte, a los órganos reveladores, a una frecuente definición imperfecta del fenómeno que se estudia y consiguiente clasificación, y a la tendencia, por parte de los sujetos económicos, a comunicar los datos equivocados, por temor a mayores impuestos, competencia, etc.

Quizá podría parecer que, aumentando la precisión en las observaciones y en la medición del fenómeno, estábamos en condiciones de emplear relaciones económicas exactas. No obstante, aunque esto fuese posible —es decir, los datos estadísticos fuesen reales y viniesen medidos de forma precisa—, las ecuaciones no resultarían exactas, ya que por las razones expuestas en la página 343 el econometrista considera explícitamente sólo un número restringido de variables, como concurrentes en la determinación de un fenómeno dado.

Vemos, pues, que la dificultad cada vez más acentuada para formar relaciones económicas exactas se deriva de la existencia de dos órdenes de errores. Mas precisamente siguiendo la terminología adoptada por la "Cowles Commission", la presencia de *error en las variables* (o errores debidos a medida) y *error en las ecuaciones* (o "shocks" por haber considerado sólo algunas variables).

Desde hace tiempo los miembros de la Comisión Cowles han dedicado su atención a calcular la influencia que los dos tipos de error ejercen sobre las relaciones de comportamiento. Gracias a los estudios efectuados —sobre todo por T. Haavelmo— se han conseguido resultados importantes, particularmente en lo que se refiere a errores en las ecuaciones. En efecto, considerando estas últimas como variables aleatorias ha sido posible, empleando el cálculo de probabilidades, formular relaciones estocásticas. En lo que respecta a los errores en las variables, los estudios prosiguen, dada la existencia de mayores dificultades de orden estadístico, presentadas principalmente en la estimación de parámetros.

Por esto en nuestras lecciones consideraremos, por lo tanto, *modelos de shock*, o sea, modelos compuestos de relaciones económicas que solamente tienen en cuenta "errores en las ecuaciones".

Después de cuanto hemos dicho resultará evidente que es conveniente sustituir la expresión "un grupo de variables que satisfacen exactamente una ecuación" por "un grupo de variables que aproximadamente satisface unas ecuaciones dadas".

Consideremos, por ejemplo, la siguiente relación:

$$D_A = \alpha + \beta P_A + \gamma P + \delta R$$

que expresa la demanda del bien A en función del precio del mismo bien (P_a) del precio de otro bien y de los ingresos del consumidor R, además de un número de parámetros dados (α, β, γ, δ).

Habiendo adoptado la expresión "un grupo de variables que aproximadamente satisfacen una ecuación dada", y considerando sólo el efecto del error en las ecuaciones, deberemos añadir el segundo miembro de la relación precedente una variable —por ejemplo, ε—, obteniendo:

$$D_A = \alpha + \beta P_A + \gamma P + \delta R + \varepsilon$$

en donde ε, repetimos, es una variable aleatoria que tiene una distribución de probabilidad con media cero. Como habíamos dicho anteriormente, la variable aleatoria representa el efecto conjunto de todas las variables de menor importancia que no se han introducido explícitamente en las relaciones; cada una de las cuales tiene poca importancia, pero que en su conjunto pueden provocar perturbaciones en la ecuación dicha. A propósito de la variable (o componente) aleatoria, añadimos que, generalmente, se supone que sus valores son independientes uno de otro y que no están correlacionados serialmente.

En lo que respecta a la variable aleatoria introducida en las relaciones relativas a la demanda del bien A, alguno podría suponer que es un sencillo aditamento superficial hecho por cuestiones estadísticas. En efecto, cuando describimos ε como una variable aleatoria, con una distribución de probabilidad dada para cada grupo de valores de las variables que se consideran, pensamos en una clase de población hipotética e infinita —ya que para cada valor de las variables exógenas las endógenas no toman un valor único, sino una distribución de valores—, cada una de las cuales queda completamente descrita por los valores de las variables consideradas y de la distribución de ε.

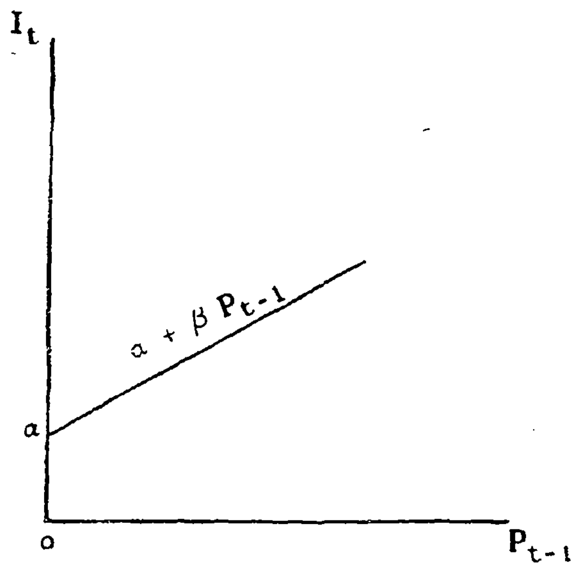
La influencia que ejerce la variable aleatoria ε en una ecuación dada puede verse de forma gráfica.

Supongamos que la inversión total efectuada en el tiempo *t* es (I_t) en una colectividad dada depende del volumen del beneficio conseguido en el período precedente (P_{t-1}) e, independientemente de esto, el Gobierno efectúa por su parte inversiones. Cuanto hemos dicho puede expresarse por la siguiente ecuación lineal:

$$I_t = \alpha + \beta P_{t-1}$$

en donde α es la cuantía de la inversión gubernamental; β el tanto por ciento de beneficio obtenido en el período precedente a *t* y destinado a la inversión.

La susodicha ecuación puede expresarse en forma gráfica, como se indica en la figura; α es la ordenada en el origen y β la pendiente de la recta.

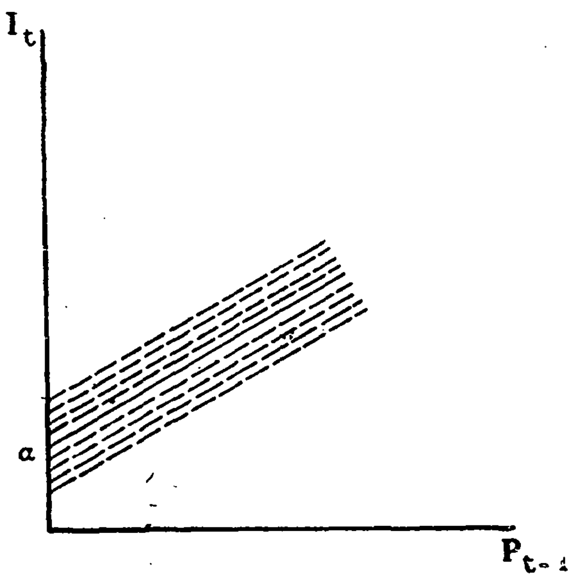


Si describiésemos el fenómeno "inversión" en forma aleatoria, la ecuación precedente tomará la forma

$$I_t = \alpha + \beta P_{t-1} + \varepsilon$$

donde la variable estocástica ε expresa el efecto conjunto de otras muchas variables que influyen sobre la inversión (por ejemplo, producción, tipo de interés, etc.) y no figuran de forma explícita en nuestra relación.

Pero en esta última ecuación hay una diferencia con la no estocástica; que no puede expresarse mediante una sola recta. Ya que la segunda dependerá de los valores tomados por la variable aleatoria ε —y como ya habíamos dicho, la ε puede tomar infinitos valores—. La recta mantendrá invariable la pendiente, pero la intersección con el eje de ordenadas la realizará por debajo o por encima de α. Limitando el campo de variación, nuestra ecuación será una de las rectas de puntos del gráfico adjunto.



——————— $\alpha + \beta P_{t-1}$

— — — — — $\alpha + \beta P_{t-1} \pm \varepsilon$

A propósito de la introducción del cálculo de las probabilidades en el estudio económico, se han producido críticas por parte de un cierto número de economistas por la dificultad de orden lógico que surge al adoptar los esquemas económicos de naturaleza estocástica. Podríamos decir, de una forma escueta, que su adversión a esta nueva dirección del estudio reside en el hecho de la brevedad de la serie temporal a disposición del econometrista que impide considerarla como formando parte de una población casi infinita. Además pone de manifiesto que las variables económicas, no comprendidas explícitamente en las ecuaciones, no poseen el carácter aleatorio, que el supuesto de la teoría de la probabilidad (o sea, el ser el resultante de muchas variables independientes del mismo orden de magnitud), sino que dependen de consideraciones ambientales en las que prevalecen factores causales.

Por otro lado, los defensores de la formulación de relaciones económicas de tipo estocástico están de acuerdo en que la resistencia de una parte de los economistas, a considerar el modelo probabilístico como la base de la investigación económica —en cuanto que recalcan vale sólo para aquellos fenómenos que se asemejan a *extracciones tipo lotería o a una serie de observaciones que son* independientes entre sí o pertenecen a la misma población—, es motivada por un concepto limitado de los esquemas de probabilidades y de las variables aleatorias. A tal respecto, los autores de esta moderna corriente de investigación consideran que no es necesario que las observaciones sean independientes ni se refieran a una sola variable, es decir, a una distribución de probabilidad unidimensional. En efecto, afirman que si se dispone de n observaciones que no se pueden considerar independientes, en lugar de considerar n observaciones de una sola variable, pueden considerarse como una sola observación de n variables, para lo cual podríamos pensar que existe dependencia; dada por una distribución de probabilidad conjunta, cuya existencia es puramente hipotética.

Por otra parte, los miembros de la "Cowles Commission" no han dejado de poner de manifiesto que si examinamos la actual investigación económica, incluída aquella que comprende a los que se oponen al uso del esquema probabilístico, se revela que, en última instancia, el análisis reposa en una noción vaga de probabilidad. En tales estudios, en efecto, se nota que mientras unas desviaciones resultantes de las aplicaciones de la teoría a la realidad se clasifican como admisibles; otras, en cambio, se consideran prácticamente imposibles. Y como estos términos no tienen un significado bien delimitado, el hecho de la introducción del cálculo de probabilidades en economía hace que la expresión vaga "prácticamente imposible" o "casi cierto", se sustituye por expresiones del tipo "la probabilidad es próxima a cero" o "la probabilidad es próxima a uno". Cosa que se puede hacer si se introduce un riguroso esquema teórico para efectuar tal clasificación.

Después de esta rápida visión de los principios teóricos que son la base de las relaciones económicas estocásticas, y antes de desarrollar lo que es un modelo estocástico, estimamos oportuno hacer una referencia precisa respecto de las variables que se presentan en este tipo particular de relaciones.

Además de la existencia de variables aleatorias, en el modelo bajo examen se nota que hay variables que son estocásticamente dependientes o independientes de las perturbaciones aleatorias, que corresponden, respectivamente, a las variables endógenas o exógenas, ya consideradas en el modelo no estocástico.

Con objeto de comprender mejor tal dependencia o independencia de las variables económicas respecto a la aleatoria, consideremos el siguiente modelo estocástico compuesto de una sola ecuación:

$$R = \alpha + \beta I + \varepsilon$$

en donde R representa la renta nacional de una colectividad; I la inversión efectuada en un período dado de tiempo; α y β dos parámetros; ε la variable aleatoria, la cual, poniendo en evidencia que la relación R e I no es exacta, representa todas las variables no observadas, o por lo menos no incluídas explícitamente en el modelo, y que es necesaria para hacer exacta la ecuación, suponiendo que nuestras variables han estado medidas exactamente.

Admitamos ahora la existencia de una relación entre la variación de la inversión I y la renta nacional (R); entre la componente aleatoria ε y la renta nacional (R). Por el contrario, supondremos que no existe ninguna relación entre la variación de la variable estocástica ε y la inversión (I). Las hipótesis que hemos hecho pueden representarse de la forma siguiente:

la línea continua indica que las variaciones de las variables puestas en los extremos están en relación de dependencia entre sí,

mientras la linea de puntos indica que las variables unidas por ellas no están ligadas por ninguna dependencia.

En virtud de tal hipótesis se puede afirmar que I influye sobre R pero que R, a su vez, no influye sobre I; por lo cual la variable inversión (I) es exógena respecto de la renta nacional (R) en el sentido de que si hacemos variar I nuestro modelo permitirá descubrir las variaciones de R. Por el contrario, las variaciones de R asociadas a variaciones en las variables omitidas no determinarán variaciones de I. Por tanto, decir que I y ε se distribuyen independientemente equivale a decir que de las variables excluídas la relativa a la inversión (I) es exógena y la renta nacional R (endógena).

Dicho esto examinemos un modelo micro-económico del tipo estocástico expuesto por Leontief en un estudio aparecido en "A Survey of Contemporary Economics".

Indicaremos por P_t el precio y por Q_t la cantidad de un bien dado demandado y ofrecido en el tiempo t; Y_t representa la renta a disposición de los consumidores; ε_1 y ε_2 las variables alcatorias que representan el efecto conjunto de todas las variables económicas no consideradas explícitamente, pero que tienen influencia en la demanda y oferta del bien. Hacemos la hipótesis de que las relaciones entre todas las variables son lineales y consideramos la renta a disposición de los consumidores como la variable no estocásticamente (es decir, variable exógena) dependiente. Las dos ecuaciones que describen la situación del mercado en el instante t serán las siguientes:

$$Q_t = \alpha_1 P_t + \beta Y_t + \varepsilon_1 \qquad [1]$$

$$Q_t = \alpha_2 P_t + \varepsilon_2 \, . \qquad [2]$$

En donde la ecuación [1] expresa la demanda y la [2] la oferta del bien considerado. Por otra parte, los parámetros α_1 y α_2 —que generalmente se suponen con signo negativo y positivo respectivamente, dado que todo aumento del precio hace disminuir la demanda del bien (α_1) y al aumentar el precio de venta la oferta aumentará (α_2)— reflejarán la inclinación de las curvas de demanda y oferta, y el parámetro β medirá la influencia de la renta sobre la cantidad demandada.

Como habíamos dicho en la lección en que considerábamos los modelos no estocásticos, para resolver las ecuaciones deberíamos poner las variables endógenas —en nuestro caso el precio P_t y la cantidad Q_t— en función de la variable exógena renta Y_t; y en el caso estocástico, de las variables aleatorias (ε_1 y ε_2).

Si sustituímos en [1] Q_t por su valor en [2], tendremos:

$$\alpha_2 P_t + \varepsilon_2 = \alpha_1 P_t + \beta Y_t + \varepsilon_1$$

y dejando en el primer miembro de la ecuación la variable P_t, obtendremos:

$$\alpha_2 P_t - \alpha_1 P_t = \beta Y_t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

de donde

$$P_t = \frac{\beta}{\alpha_2 - \alpha_1} Y_t + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\alpha_2 - \alpha_1}. \qquad [1a]$$

Para poner la variable endógena Q_t en función de la exógena Y_t y las aleatorias ε_1, ε_2, sustituyendo en [2] P_t por su expresión en [1a], obtendremos:

$$Q_t = \alpha_2 \left\| \frac{\beta}{\alpha_2 - \alpha_1} Y_t + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \right\| + \varepsilon_2$$

de donde:

$$Q_t = \frac{\alpha_2 \beta}{\alpha_2 - \alpha_1} Y_t + \frac{\varepsilon_1 \alpha_2 - \varepsilon_2 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} + \varepsilon_2$$

o sea:

$$Q_t = \frac{\alpha_2 \beta}{\alpha_2 - \alpha_1} Y_t + \frac{\varepsilon_1 \alpha_2 - \varepsilon_2 \alpha_2 + \varepsilon_2 \alpha_2 - \varepsilon_2 \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

lo que conduce a:

$$Q_t = \frac{\alpha_2 \beta}{\alpha_2 - \alpha_1} Y_t + \frac{\varepsilon_1 \alpha_2 - \varepsilon_2 \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \qquad [2a]$$

Por tanto, después de las transformaciones operadas —es decir, después de haber expresado la variable endógena en función de la exógena y de la componente estocástica—, nuestro modelo quedará compuesto de las siguientes ecuaciones:

$$P_t = \frac{\beta}{\alpha_2 - \alpha_1} Y_t + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \qquad [1a]$$

$$Q_t = \frac{\beta \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} Y_t + \frac{\varepsilon_1 \alpha_2 - \varepsilon_2 \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \qquad [2a]$$

El sistema formado por las [1a] y [2a] se llama sistema en *forma reducida* del sistema estructural original [1] y [2]. En contraste con las relaciones [1] y [2], las ecuaciones expresadas en la forma reducida [1a] y [2a] son estructuralmente independientes. Ellas contienen los parámetros estructurales comunes α_1, α_2, β, que no pueden variar sin necesariamente influir de modo simultáneo en las relaciones [1a] y [2a]. En otros términos, la distinción fundamental entre el sistema en forma estructural y el sistema en forma reducida es el siguiente: en la forma estructural cada ecuación contiene las variables estocásticamente dependientes (en nuestro ejemplo, P_t y Q_t) y diferentes parámetros estructurales (en nuestro caso, α_1, α_2 y β); mientras en el sistema expresado en forma reducida cada ecuación contiene una variable endógena diferente (P_t o Q_t) y algunos coeficientes estructurales comunes (β). De esta forma, conociendo los valores de los parámetros α_1, α_2, β; de la variable exógena Y_t y de las componentes aleatorias

ε_1 y ε_2, cada una de las ecuaciones del sistema reducido puede emplearse directamente para deducir el valor de una variable endógena.

Volvamos al sistema original, es decir:

$$Q_t = \alpha_1 P_t + \beta Y_t + \varepsilon_1 \qquad [1]$$

$$Q_t = \alpha_2 P_t + \varepsilon_2 \qquad [2]$$

que transformamos en:

$$Q_t - \alpha_1 P_t - \beta Y_t = \varepsilon_1 \qquad [1b]$$

$$Q_t - \alpha_2 P_t = \varepsilon_2 . \qquad [2b]$$

Ahora bien, como ε_1 y ε_2 son variables aleatorias, las variables endógenas P_t y Q_t, que aparecen en el primer miembro de [1b] y [2b], serán, por lo tanto, aleatorias. Por lo tanto, dadas α_1, α_2, β e Y_t, la probabilidad de tener, en el tiempo *t*, un precio P_t y una cantidad Q_t particulares —en otros términos, se trata de la distribución conjunta de las dos variables endógenas—, queda unívocamente determinada a partir de la función de distribución conjunta de las componentes estadísticas. Corrientemente, los estudiosos en lugar de deducir la distribución de probabilidad de las variables endógenas se limitan a determinar el valor medio que existirá en un momento dado (en nuestro ejemplo el tiempo *t*); es decir, el valor más probable (*). En este caso el investigador, por lo tanto, busca el conocimiento del valor medio de la componente estocástica.

En el curso de la presente lección se ha dicho varias veces que, *dado el valor o valores de los parámetros, y los de las variables exógenas, la distribución de probabilidad (simple o conjunta) de las componentes aleatorias, la variable endógena no toma un valor único, sino una distribución de valores.* Con objeto de comprobar cuanto hemos dicho, examinaremos dos modelos: primero, uno compuesto de una sola ecuación; después, otro formado de tres ecuaciones.

(*) Que el valor medio es el valor más probable, no es cierto siempre.

Comenzaremos considerando en su forma más sencilla la ecuación de la demanda de un bien dado:

$$C_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon$$

en donde C_t = consumo del bien en el tiempo *t* (variable endógena); Y_{t-1} = renta del período precedente a disposición del consumidor (variable predeterminada; por lo tanto, exógena); α = parámetro, y ε = variable aleatoria con distribución dada y media cero.

Supongamos que α sea igual a 0,85, que la componente estocástica ε toma los valores —2, —1, 0, 1, 2, con probabilidad respectiva $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{10}$; y que en un cierto período de tiempo la variable Y_{t-1} es igual a 105.

Volvamos a la ecuación de la demanda y sustituyamos en ella los valores atribuídos al parámetro α y a la variable exógena Y_{t-1}

$$C_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon = 0{,}85 \,.\, 105 + \varepsilon = 89{,}25 + \varepsilon\,.$$

Para determinar la distribución de la variable endógena (C_t) debemos sustituir la componente estocástica ε por los valores dados anteriormente, teniendo en cuenta las probabilidades respectivas:

$C_t = 89{,}25 + \varepsilon = 89{,}25 - 2 = 87{,}25$	con	probabilidad	1/10
$C_t = 89{,}25 + \varepsilon = 89{,}25 - 1 = 88{,}25$	"	"	2/10
$C_t = 89{,}25 + \varepsilon = 89{,}25 + 0 = 89{,}25$	"	"	4/10
$C_t = 89{,}25 + \varepsilon = 89{,}25 + 1 = 90{,}25$	"	"	2/10
$C_t = 89{,}25 + \varepsilon = 89{,}25 + 2 = 91{,}25$	"	"	1/10

En otros términos, la probabilidad de que en el tiempo *t* la variable tome el valor 87,25, es 1/10, etc.

Examinemos, ahora, un modelo micro-económico, de naturaleza estocástica formada de tres ecuaciones. Precisamente, el siguiente:

$$Q_d = \alpha P + \varepsilon_1 \qquad [I]$$
$$Q_0 = \beta P + \gamma C + \varepsilon_2 \qquad [II]$$
$$Q_d = Q_0 \qquad [III]$$

en donde Q_d = cantidad demandada; Q_o = cantidad ofrecida; P = precio de venta del bien; C = coste de producción; α, β, γ = parámetros; ε_1, ε_2 = componentes aleatorias.

Supondremos que Q_d; Q_o, P son variables endógenas; C = variable exógena. Como habíamos dicho en otras ocasiones, deberemos poner nuestro modelo en forma reducida; es decir, expresar las tres variables endógenas: "cantidad demandada", "cantidad ofrecida" y "precio de venta del bien"; en función de la variable exógena: "coste de producción". Con este objeto sustituyamos en la [III] la expresión de Q_d y Q_o de [I] y [II], obteniendo:

$$\alpha P + \varepsilon_1 = \beta P + \gamma C + \varepsilon_2$$

de lo cual, sacando a P factor común, tendremos:

$$(\alpha - \beta) P = \gamma C + \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

es decir:

$$P = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} C + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\alpha - \beta}.$$

Sustituyendo en la [1] P, queda:

$$Q_d = \alpha \left[\frac{\gamma}{\alpha - \beta} C + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\alpha - \beta} \right] + \varepsilon_1 =$$

$$= \frac{\alpha \gamma}{\alpha - \beta} C + \alpha_2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\alpha - \beta} + \varepsilon_1$$

y para [II]:

$$Q_o = \beta \left(\frac{\gamma}{\alpha - \beta} C + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\alpha - \beta} \right) + \gamma C + \varepsilon_2 = \left(\frac{\beta \gamma}{\alpha - \beta} + \gamma \right) C +$$

$$+ \beta \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\alpha - \beta} + \varepsilon_2 .$$

Con lo que nuestro modelo toma la forma:

$$P = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} C + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\alpha - \beta} \qquad \text{[Ia]}$$

$$Q_d = \frac{\alpha\gamma}{\alpha - \beta} C + \alpha \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\alpha - \beta} + \varepsilon_1 \qquad \text{[IIa]}$$

$$Q_0 = \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha - \beta} + \gamma\right) C + \beta \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\alpha - \beta} + \varepsilon_2 . \qquad \text{[IIIa]}$$

Asignando valores arbitrarios a los parámetros estructurales $\alpha = -2{,}90$, $\beta = 4{,}70$, $\gamma = -1{,}50$, y suponiendo que la distribución de probabilidad conjunta de ε_1, ε_2 es:

		ε_1					
		−2	−1	0	1	2	
ε_2	−3	0,02	0,05	0,06	0,02	0,01	0,16
	−1	0,09	0,08	0,05	0,05	0,02	0,29
	0	0,06	0,10	0,02	0,05	0,06	0,29
	2	0,01	0,04	0,05	0,12	0,04	0,26
		0,18	0,27	0,18	0,24	0,13	1,—

Hagamos la hipótesis de que la variable exógena "costo de producción" toma en el tiempo t el valor 100.

Volviendo al modelo expuesto en forma reducida:

$$P = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} C + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\alpha - \beta} \qquad \text{[Ia]}$$

$$Q_d = \frac{\alpha\gamma}{\alpha - \beta} C + \alpha \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\alpha - \beta} + \varepsilon_1 \qquad \text{[IIa]}$$

$$Q_0 = \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha - \beta} + \gamma\right) C + \beta \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\alpha - \beta} + \varepsilon_2 \qquad \text{[IIIa]}$$

y sustituyendo la variable exógena C y los parámetros por sus valores fijos, tendremos:

$$P = \frac{-1{,}5}{-2{,}9-4{,}7}\,100 + \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{-2{,}9-4{,}7} = 19{,}73 - \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{7{,}6} \qquad [\text{Ib}]$$

$$Q_d = \frac{-2{,}9\,(-1{,}5)}{-2{,}9-4{,}7}\,100 - 2{,}9\;\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{-2{,}9-4{,}7} + \varepsilon_1 = 57{,}23 +$$

$$+\;0{,}38\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1) + \varepsilon_1 \qquad [\text{IIb}]$$

$$Q_o = \left[\frac{4{,}7\,(-1{,}5)}{-2{,}9-4{,}7} - 1{,}5\right] 100 + 4{,}7\;\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{-2{,}9-4{,}7} =$$

$$= 57{,}23 - 0{,}62\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1) + \varepsilon_1\,. \qquad [\text{IIIb}]$$

Consideremos primeramente la [Ib]; en la tabla siguiente están los valores atribuídos a las dos componentes causales ε_1, ε_2, con arreglo a la distribución de probabilidad conjunta de la tabla anterior.

PROBABILIDAD DE

ε_1	ε_2	$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1$
—2	—3	0,02	—1
—1	—3	0,05	—2
—0	—3	0,06	—3
1	—3	0,01	—4
2	—3	0,01	—5
—2	—1	0,09	1
—1	—1	0,08	0
0	—1	0,05	—1
1	—1	0,05	—2
2	—1	0,02	—3
—2	0	0,06	2
—1	0	0,10	1
0	0	0,02	0
1	0	0,05	—1
2	0	0,06	—2
—2	2	0,01	4
—1	2	0,04	3
0	2	0,05	2
1	2	0,12	1
2	2	0,04	0

Reagrupando ahora todos los términos $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ comunes y sumando las respectivas probabilidades, tendremos la distribución de:

PROBABILIDAD DE

$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$	$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$
—5	0,01
—4	0,02
—3	0,08
—2	0,16
—1	0,12
0	0,14
1	0,31
2	0,11
3	0,04
4	0,01

Volviendo a la ecuación: $P = 19{,}73 - \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{7{,}6}$ [Ib]

y sustituyendo en el numerador de la fracción los valores tomados por la diferencia $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$, tendremos:

$P = 19{,}73 - \dfrac{-5}{7{,}6} = 19{,}73 + 0{,}66 = 20{,}39$ con probabilidad igual a 0,01

$P = 19{,}73 - \dfrac{-4}{7{,}6} = 19{,}73 + 0{,}53 = 20{,}26$ " " " " 0,02

$P = 19{,}73 - \dfrac{-3}{7{,}6} = 19{,}73 + 0{,}39 = 20{,}12$ " " " " 0,08

$P = 19{,}73 - \dfrac{-2}{7{,}6} = 19{,}73 + 0{,}26 = 19{,}99$ " " " " 0,16

$P = 19{,}73 - \dfrac{-1}{7{,}6} = 19{,}73 + 0{,}13 = 19{,}86$ " " " " 0,12

$P = 19{,}73 - \dfrac{0}{7{,}6} = 19{,}73$ " " " " 0,14

$P = 19{,}73 - \dfrac{1}{7{,}6} = 19{,}73 - 0{,}13 = 19{,}60$ " " " " 0,31

$P = 19{,}73 - \dfrac{2}{7{,}6} = 19{,}73 - 0{,}26 = 19{,}47$ " " " " 0,11

$P = 19{,}73 - \dfrac{3}{7{,}6} = 19{,}73 - 0{,}39 = 19{,}34$ " " " " 0,04

$P = 19{,}73 - \dfrac{4}{7{,}6} = 19{,}73 - 0{,}53 = 19{,}20$ " " " " 0,01

De esta forma se han expresado los valores de la variable endógena "precio de venta" P, dado el valor de los parámetros, de la variable exógena (coste de producción), y la distribución de probabilidad. El resultado obtenido puede interpretarse: *El nivel del precio de venta del bien que tiene mayor probabilidad de aparecer en el tiempo* t *es* 19,60, *siendo la probabilidad* 0,31.

Examinemos ahora la relación [IIb]. Como para la [Ib] damos a continuación los valores asignados a las dos variables aleatorias, su distribución de probabilidad y el valor de 0,38 $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1$.

ε_1	ε_2	PROBABILIDAD DE $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$	$0{,}38\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1$
— 2	— 3	0,02	— 2,38
— 1	— 3	0,05	— 1,76
0	— 3	0,06	— 1,14
1	— 3	0,02	— 0,52
2	— 3	0,01	0,10
— 2	— 1	0,09	— 1,62
— 1	— 1	0,08	— 1,—
0	— 1	0,05	— 0,38
1	— 1	0,05	0,24
2	— 1	0,02	0,86
— 2	0	0,06	— 1,24
— 1	0	0,10	— 0,62
0	0	0,02	0
1	0	0,05	0,62
2	0	0,06	1,24
— 2	2	0,01	— 0,48
— 1	2	0,04	0,12
0	2	0,05	0,76
1	2	0,12	1,38
2	2	0,04	2,—

Así, para la variable endógena "cantidad demandada", diferentemente a lo que ocurre con el precio de venta, la columna de la diferencia entre las componentes aleatorias no contiene términos comunes, podríamos, pues, sustituir, directamente, en el segundo y tercer sumando de la relación [IIb], el valor ahora encontrado después de haberlos dispuesto en orden de magnitud. En consecuencia, en virtud de esto los distintos valores que tomará la cantidad demandada (Q_d) sobre la base de la distribución de probabilidad de las variables aleatorias ε_1, ε_2 (ver pág.):

$$Q_d = 57{,}23 + 0{,}38\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1 \qquad [IIb]$$

$Q_d = 57{,}23 - 2{,}38 = 54{,}85$	con probabilidad	de	aparición		0,02
$Q_d = 57{,}23 - 1{,}76 = 55{,}47$	"	"	"	"	0,05
$Q_d = 57{,}23 - 1{,}62 = 55{,}61$	"	"	"	"	0,09
$Q_d = 57{,}23 - 1{,}24 = 55{,}99$	"	"	"	"	0,06
$Q_d = 57{,}23 - 1{,}14 = 56{,}09$	"	"	"	"	0,06
$Q_d = 57{,}23 - 1{,}\!- = 56{,}23$	"	"	"	"	0,08
$Q_d = 57{,}23 - 0{,}62 = 56{,}61$	"	"	"	"	0,10
$Q_d = 57{,}23 - 0{,}52 = 56{,}71$	"	"	"	"	0,02
$Q_d = 57{,}23 - 0{,}48 = 56{,}75$	"	"	"	"	0,01
$Q_d = 57{,}23 - 0{,}38 = 56{,}85$	"	"	"	"	0,05
$Q_d = 57{,}23 + 0 = 57{,}23$	"	"	"	"	0,02
$Q_d = 57{,}23 + 0{,}10 = 57{,}33$	"	"	"	"	0,01
$Q_d = 57{,}23 + 0{,}12 = 57{,}35$	"	"	"	"	0,04
$Q_d = 57{,}23 + 0{,}24 = 57{,}47$	"	"	"	"	0,05
$Q_d = 57{,}23 + 0{,}62 = 57{,}85$	"	"	"	"	0,05
$Q_d = 57{,}23 + 0{,}76 = 57{,}99$	"	"	"	"	0,05
$Q_d = 57{,}23 + 0{,}86 = 58{,}09$	"	"	"	"	0,02
$Q_d = 57{,}23 + 1{,}24 = 58{,}47$	"	"	"	"	0,06
$Q_d = 57{,}23 + 1{,}38 = 58{,}61$	"	"	"	"	0,12
$Q_d = 57{,}23 + 2{,}\!- = 59{,}23$	"	"	"	"	0,04

O sea, la probabilidad de que en el tiempo t *la variable endógena cantidad demandada tome el valor* 58,61 *es* 0,12 *y así sucesivamente.*

Terminado el examen de la [IIb], debemos considerar la [IIIb], puesto que ésta es idéntica a la relación señalada con [Ia] en virtur de [III]. Por tanto, el valor de la variable endógena, cantidad ofrecida Q_d, tendrá la misma distribución que la cantidad demandada.

Antes de terminar estas lecciones deseamos recordar una vez más que en la realidad el valor de los parámetros no es conocido y es labor del econometrista determinarlos aplicando métodos estadísticos particulares a las observaciones empíricas que están a su disposición, tanto de las variables exógenas como endógenas.

LECCION V

EL PROBLEMA DE LA IDENTIFICACION

En las páginas precedentes habíamos indicado la posibilidad de expresar relaciones económicas en forma matemática, mediante sistemas que tienen tantas ecuaciones como variables endógenas; es decir, con sistemas determinados.

Sin embargo, la medición estadística de un sistema de ecuaciones requiere la solución de dos problemas sucesivos, lógicamente distintos: el problema de la identificación de cualquier ecuación y el de la estimación de los parámetros contenidos en cada relación. Mientras que el segundo problema se considera en lecciones sucesivas, en la presente consideraremos el de la identificación.

Antes de que se afrontase el problema de la identificación era frecuente el caso en que se formulaban distintas ecuaciones que tenían las mismas variables. Por lo tanto, el modelo podría ser teóricamente correcto y no tener ninguna utilidad práctica, porque resultaba imposible atribuir valores a los parámetros de una o todas las ecuaciones del sistema. Por esto, antes de estimar los parámetros contenidos en el modelo, se deberá examinar si los datos observados pueden suministrar realmente información respecto a los parámetros estudiados.

Un ejemplo nos servirá para poner de manifiesto la importancia de la identificación en economía. Consideremos el modelo siguiente formado por dos ecuaciones y que se refieren, respectivamente, a la demanda y oferta de bienes:

$$Q = \alpha + \beta P + \varepsilon_1 \qquad [1]$$

$$Q = \gamma + \delta P + \varepsilon_2 \qquad [2]$$

en donde α y γ son dos constantes; P es el precio y Q la cantidad, ambas se determinan por la intersección de la demanda y oferta. Por otra parte, como por teoría económica sabemos que la demanda es una función decreciente del precio y la oferta una función creciente, tendremos que:

$$\beta < 0 \qquad \delta > 0 .$$

En lo que se refiere a las variables aleatorias ε_1 y ε_2, hacemos la hipótesis que se distribuyen normalmente con valores medios igual a cero, es decir:

$$E\,\varepsilon_1 = 0 \qquad E\,\varepsilon_2 = 0 .$$

Además suponemos que el número de observaciones empíricas a nuestra disposición y relativas a las variables: precio y cantidad, son muy grandes.

El problema se podría expresar así: ¿es posible estimar de un modo unívoco los parámetros contenidos en las ecuaciones [1] y [2]? Una sencilla reflexión indica que en nuestro caso no se podrá individualizar la verdadera oferta ni la verdadera demanda, cualquiera que sea el número de observaciones de que dispongamos.

En efecto, indiquemos sobre el eje de coordenadas las cantidades observadas y los precios correspondientes. En este sistema cartesiano (rectangular) las observaciones (cantidad-precio) vendrán representadas por puntos que tenderán a concentrarse en una zona dada. Supongamos que asignamos a los coeficientes β y δ valores arbitrarios.

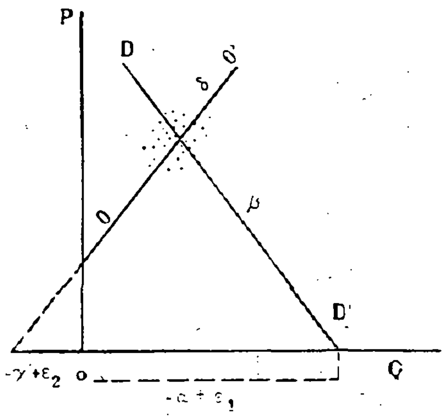


Figura 1

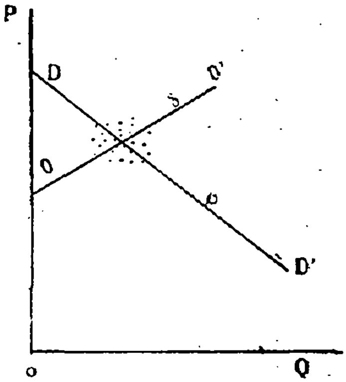


Figura 2

Por uno cualquiera de los puntos del diagrama. Podríamos hacer pasar las dos curvas —las inclinaciones vienen medidas por valores arbitrarios asignados a β y δ— que son, respectivamente, la demanda (DD') y la oferta (OO'). Evidentemente, las intersecciones de las curvas varían según los puntos por los cuales se les hace pasar, siendo provocadas tales variaciones por los efectos erráticos. Así, las intersecciones de las curvas de demanda y oferta sobre el eje de abscisas del gráfico primero, vienen dadas por $-\alpha + \varepsilon_1$ y $-\gamma + \varepsilon_2$. Como en una muestra suficientemente grande las medias de ε_1 y ε_2 prácticamente serán igual a cero, suponiendo una cierta estabilidad en los valores de los parámetros β y δ, podríamos determinar el valor de las constantes α y γ.

De todas estas consideraciones no podemos distinguir la verdadera inclinación β y δ (como se indican en la figura 1). De cualquiera otros valores de los presuntos coeficientes angulares β y δ (como se indican en la figura 2). Cualquier par arbitrario de coeficientes angulares β y δ que satisfagan a las condiciones impuestas precedentemente ($\beta < 0$ y $\delta > 0$) junto con las correspondientes intersecciones α, γ representará otra hipótesis, igualmente aceptable desde el punto de vista estadístico, respecto a la formación de las variables observadas. Por lo que en este caso existe más de un conjunto de parámetros compatible con las observaciones.

Volvamos de nuevo a nuestro ejemplo —la formación del precio de un bien dado—; considerémoslo bajo un aspecto distinto. Como las relaciones que concurren a la formación del fenómeno bajo examen son la ecuación de demanda y oferta, construyamos un modelo formado por estas dos ecuaciones, que designaremos por [I] y [II]. En donde P es el precio; Q_1 y Q_2, respectivamente, la cantidad del bien (por ejemplo, carne de vaca) comprada y vendida; β y δ dos parámetros; ε_1 y ε_2 variables aleatorias. Por otra parte, dado que en las condiciones de equilibrio la demanda es igual a la oferta, pondremos $Q_1 = Q_2$, lo que expresaremos por las relaciones:

$$P = \alpha + \beta Q_1 + \varepsilon_1 \text{ (demanda)} \qquad [I]$$

$$P = \delta + \gamma Q_2 + \varepsilon_2 \text{ (oferta)} \qquad [II]$$

$$Q_1 = Q_2 . \qquad [III]$$

Ahora bien, un examen atento de las ecuaciones nos permite decir que tanto la ecuación de la demanda [I] como la de oferta [II], por efecto de la [III], contienen las mismas variables económicas; por lo que, aunque dispusiésemos de infinitos datos estadísticos relativos a las variables que nos interesan, y estimásemos los valores de los parámetros, nos encontramos en la imposibilidad de atribuir estos valores a una o a otra ecuación.

Para comprobar que tanto la ecuación de demanda [I] como la de oferta [II], por efecto de la [III], contienen las mismas variables, pondremos el sistema en la forma siguiente:

$$P - \alpha - \beta Q_1 = \varepsilon_1 \qquad [Ia]$$

$$P - \delta - \gamma Q_2 = \varepsilon_2 \qquad [IIa]$$

$$Q_1 - Q_2 = 0. \qquad [IIIa]$$

Multiplicando la [IIIa] por β y sumándola a la [Ia], obtendremos:

$$\begin{array}{rl} \beta Q_1 - \beta Q_2 & = 0 \\ P - \beta Q_1 - \alpha & = \varepsilon_2 \\ \hline P - \alpha - \beta Q_2 & = \varepsilon_1 \end{array} \qquad [IVa]$$

ecuación esta última que, desde el punto de vista estadístico, no tiene ningún motivo para ser distinta de la [IIa], ya que tiene la misma forma funcional (lineal) y las mismas variables. Puesto que procediendo a estimar obtenemos un solo par de valores de los parámetros, éstos deberán corresponder a ambas ecuaciones, o sea, a los valores α y β de la ecuación [IVa] y a los δ y γ de la [IIa]. Pero no tienen ningún significado económico, dado que los valores numéricos de los parámetros de la ecuación de demanda deben diferir de los relativos a la de oferta.

Del último ejemplo formulado se puede deducir, por lo tanto, que una ecuación estructural dada *no* es identificable si se puede construir una ecuación diferente de la primera, siendo esta última combinación lineal de algunas o todas las que intervienen en el modelo; y contiene las mismas variables que alguna de las que es combinación.

Puesto que el criterio es aplicable, cuando el número de ecuaciones es limitado y la forma del sistema es sencilla, algunos miembros de la "Cowles Commission" —en especial T. C. Koopman— han precisado, de una forma más rigurosa, las condiciones de identificación para cualquier número de ecuaciones existentes en un sistema dado, cuando existen determinadas restricciones impuestas al modelo.

Con objeto de limitar nuestro campo de acción examinaremos, en esta parte, las condiciones de identificación requeridas cuando empleemos restricciones de la siguiente naturaleza: los parámetros desconocidos son lineales, las perturbaciones aleatorias se consideran de naturaleza aditiva, distribuídas normalmente y no correlacionadas serialmente; no se conoce nada respecto a las relaciones existentes entre los componnetes estocásticos de las distintas ecuaciones, es decir, se admite que los componentes estocásticos son independientes.

En el caso de que se establezca la hipótesis anterior, *una condición necesaria* para la identificación de una ecuación estructural, en un modelo lineal dado, es que el número de las variables excluídas de la ecuación que se examina sea por lo menos igual al número (G) de las ecuaciones estructurales (que es el mismo que el de variables endógenas) menos uno (es decir: $G-1$). Por otra parte, la *condición necesaria y suficiente* para la identificación de una ecuación es que podamos encontrar en la matriz constituída por los parámetros de aquellas variables que aparecen sólo en las otras $(G-1)$ ecuaciones estructurales (es decir, excluyendo aquellas variables que figuran en aquella ecuación de la cual la identificación trata) un determinante de orden $G-1$ no nulo.

Una vez dicho esto pongamos un ejemplo con el fin de comprobar si se satisface la supuesta condición de identificación.

Consideremos un modelo micro-económico, relativo a la demanda y a la oferta de dos bienes: tejido de algodón y rayón en una colectividad dada.

Supongamos que la demanda de tejidos de algodón que indicaremos por Q_1 depende no sólo del precio de venta del tejido (P_1) y de la renta de los consumidores R, sino también del precio del tejido de rayón (P_2) y de la componente aleatoria (ε_1). Análogamente puede decirse de la demanda de tejido de rayón que indicaremos por Q_2 que, por lo tanto, será función de las variables P_1, R, P_2 y la componente aleatoria ε_2.

En lo que respecta a la oferta admitiremos en lo que se refiere al tejido de algodón —que designaremos por Q_1, ya que en condiciones de equilibrio la demanda es igual a la oferta— que dependerá del costo de producción (C_1), del precio de venta (P_1) y de la variable aleatoria ε_3. Por otro lado haremos la hipótesis de que la oferta de tejido de rayón Q_2 depende de su precio de venta (P_2), del coste de producción (C_2), del precio de venta de este bien en el período precedente (P_3) y de una variable aleatoria (ε_4).

Consideraremos como endógenas las variables: cantidad demandada y ofrecida de tejido de algodón y rayón (es decir, Q_1 y Q_2) y sus precios respectivos de venta (P_1 y P_2); mientras lo restante, es decir, renta disponible por cabeza (R), costo de producción (C_1 y C_2), precio de venta del rayón en el período precedente será variable exógena.

En virtud de esta hipótesis, y con el fin de tener un sistema de ecuaciones determinadas, es evidente que el número de las relaciones componentes de nuestro modelo deberá ser igual al de variables endógenas; es decir, cuatro.

De lo dicho anteriormente, tendremos:

$$a_{11} Q_1 + a_{13} P_1 + a_{14} P_2 + b_{11} R = \varepsilon_1 \text{ (demanda de algodón)} \quad [1]$$

$$a_{22} Q_2 + a_{23} P_1 + a_{24} P_2 + b_{21} R = \varepsilon_2 \text{ (demanda de rayón)} \quad [2]$$

$$a_{31} Q_1 + a_{33} P_1 + b_{32} C_1 = \varepsilon_3 \text{ (oferta de algodón)} \quad [3]$$

$$a_{42} Q_2 + a_{44} P_2 + b_{43} C_2 + b_{44} P_3 = \varepsilon_4 \text{ (oferta de rayón)} \quad [4]$$

En donde los a_i y b_i (coeficientes, respectivamente, de las variables endógenas y exógenas) son parámetros a estimar y cuyos valores numéricos son distintos de cero. Podríamos expresar su campo de variación así:

$$0 < a_i, b_i < + \infty .$$

Dicho esto, pasemos a examinar si las cuatro ecuaciones son identificables.

Comencemos con la relación [1], es decir, la ecuación de la demanda del algodón. Como el modelo está compuesto por cuatro ecuaciones, la condición necesaria para la identificación de la relación se satisfará si el número de las variables no contenidas en la ecuación de demanda del tejido de algodón es, por lo menos, igual al número de las variables endógenas que aparece en el sistema menos una; es decir, tres. Esta condición se verifica por la existencia de cuatro variables, a saber: cantidad consumida de tejido de rayón (Q_2); costo de producción relativo al bien (C_1); costo de producción relativo al bien (C_2); precio de venta del rayón en el período precedente (P_3).

Para ver si la ecuación de demanda de tejido de algodón satisface la condición necesaria y suficiente, deberemos obtener de la matriz de los parámetros que aparecen en las restantes ecuaciones, por lo menos un determinante no nulo de tercer orden. Tales parámetros se representan en el cuadro adjunto:

TABLA I

Ecuaciones	*Variables*				
	Q_2	C_1	C_2	P_3	
Ecuación de la demanda de tejido de rayón.	a_{22}	0	0	0	[2]
Ecuación de la oferta de tejido de algodón.	0	b_{32}	0	0	[3]
Ecuación de la oferta de tejido de rayón.	a_{42}	0	b_{43}	b_{44}	[4]

los determinantes de tercer orden que se pueden formar son los siguientes:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ a_{42} & 0 & b_{43} \end{vmatrix} = a_{22}\, b_{32}\, b_{43} \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ a_{42} & 0 & b_{44} \end{vmatrix} = a_{22}\, b_{32}\, b_{44} \tag{6}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{32} & 0 & 0 \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Como los determinantes [7] y [8] son nulos, se deduce que la ecuación de demanda de tejidos de algodón es identificable sólo si los determinantes [5] y [6] son distintos de cero; o sea, si a_{22}, b_{32}, b_{43} o b_{44} son no nulos. Teniendo en cuenta las condiciones impuestas anteriormente, en virtud de la cual todos los parámetros contenidos en el modelo son distintos de cero, vemos que la ecuación de demanda de algodón satisface las condiciones necesarias y suficientes para ser identificables. Con lo que es identificable.

Pasemos ahora a examinar si la relación de la demanda del tejido de rayón; o sea, la indicada en nuestro modelo con el número [2], es identificable. La condición necesaria para su identificación la satisface, ya que el número de las variables no comprendidas en la relación, pero existentes en el sistema, son: Q_1, C_1, C_2, P_3, que son superiores a $G - 1$ (tres), que es el número de ecuaciones menos una.

Para demostrar que la condición necesaria y suficiente se satisface, formamos la tabla II, conteniendo los valores de las variables que aparecen en las ecuaciones [1], [3] y [4] y no en la

TABLA II

Ecuaciones	*Variables*				
	Q_1	C_1	C_2	P_3	
Ecuación de la demanda de tejido de algodón.	a_{11}	0	0	0	[1]
Ecuación de la oferta de tejido de algodón.	a_{31}	b_{32}	0	0	[3]
Ecuación de la oferta de tejido de rayón.	0	0	b_{43}	b_{44}	[4]

todos los posibles determinantes de tercer orden son:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} \end{vmatrix} = a_{11}\, b_{32}\, b_{43} \qquad [9]$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & b_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\, b_{32}\, b_{44} \qquad [10]$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad [11]$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{32} & 0 & 0 \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad [12]$$

Por consiguiente, la ecuación de la demanda de rayón será identificable si a_{11}, b_{32}, b_{43} o b_{44} no son nulos, de forma que uno de los determinantes sea distinto de cero. Dadas las condiciones anteriores, se deduce que la ecuación es identificable.

Consideremos ahora si la ecuación de oferta de tejidos de algodón, o sea, la [3] es identificable. Dado que en el sistema, y no en la ecuación, existen las variables Q_2, P_2, R, C_2, P_3, el cual es superior a $G - 1$ (tres), es evidente que la condición necesaria se satisface.

Respecto a la condición necesaria y suficiente para la identificación dispongamos los coeficientes de las variables que aparecen en el sistema, pero no en la ecuación, en la tabla siguiente:

TABLA III

Ecuaciones	*Variables*					
	Q_2	P_2	R	C_2	P_3	
Ecuación de la demanda de algodón.	Q_2	P_2	R	C_2	P_3	[1]
Ecuación de la demanda de rayón.	0	a_{14}	b_{11}	0	0	[2]
Ecuación de la oferta de rayón.	a_{22}	a_{24}	b_{21}	0	0	[4]
	a_{42}	a_{44}	0	b_{43}	b_{44}	

los posibles determinantes de tercer orden, serán:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{14} & b_{11} \\ a_{22} & a_{24} & b_{21} \\ a_{42} & a_{44} & 0 \end{vmatrix} = a_{14}\, b_{21}\, a_{42} + b_{11}\, a_{22}\, a_{44} - b_{11}\, a_{24}\, a_{42} \qquad [13]$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{14} & 0 \\ a_{22} & a_{24} & 0 \\ a_{42} & a_{44} & b_{43} \end{vmatrix} = -a_{14}\, a_{22}\, b_{43} \qquad [14]$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{14} & 0 \\ a_{22} & a_{24} & 0 \\ a_{42} & a_{44} & b_{44} \end{vmatrix} = -a_{14}\, a_{22}\, b_{44} \qquad [15]$$

$$\begin{vmatrix} a_{14} & b_{11} & 0 \\ a_{24} & b_{21} & 0 \\ a_{44} & 0 & b_{44} \end{vmatrix} = a_{14}\, b_{21}\, b_{44} - b_{11}\, a_{24}\, b_{44} \qquad [16]$$

$$\begin{vmatrix} 0 & b_{11} & 0 \\ a_{22} & b_{21} & 0 \\ a_{42} & 0 & b_{44} \end{vmatrix} = -b_{11}\, a_{22}\, b_{43} \qquad [17]$$

$$\begin{vmatrix} 0 & b_{11} & 0 \\ a_{22} & b_{21} & 0 \\ a_{42} & 0 & b_{44} \end{vmatrix} = b_{11}\, a_{22}\, b_{44} \qquad [18]$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{22} & 0 & 0 \\ a_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad [19]$$

$$\begin{vmatrix} a_{14} & b_{11} & 0 \\ a_{24} & b_{21} & 0 \\ a_{44} & 0 & b_{43} \end{vmatrix} = a_{14}\, b_{21}\, b_{43} - b_{11}\, a_{24}\, b_{43} \qquad [20]$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad [21]$$

$$\begin{vmatrix} a_{14} & 0 & 0 \\ a_{24} & 0 & 0 \\ a_{44} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad [22]$$

También en este caso la condición necesaria y suficiente para la identificación de la oferta de tejido de algodón se cumple, dadas las condiciones ya dichas, en virtud de lo cual los determinantes [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19] son distintos de cero.

Por último, deberíamos considerar la identificabilidad de la ecuación [4], que representa la oferta de rayón. Las variables que intervienen en el sistema, pero no en la ecuación, son superiores a $G-1$ (son Q_1, P_1, R, C_1); la condición necesaria queda satisfecha.

Para comprobar si la ecuación [4] satisface las condiciones necesarias y suficientes, formaremos, de forma análoga a como lo hemos realizado anteriormente, la tabla siguiente:

TABLA IV

Ecuaciones	*Variables*				
Ecuación de la demanda de algodón.	Q_1	P_1	R	C_1	[1]
	a_{11}	a_{13}	b_{11}	0	
Ecuación de la demanda de rayón.					[2]
	0	a_{23}	b_{21}	0	
Ecuación de la oferta de algodón.	a_{31}	a_{33}	0	b_{32}	[3]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_{11} \\ 0 & a_{23} & b_{21} \\ a_{31} & a_{33} & 0 \end{vmatrix} = a_{13}\, b_{21}\, a_{31} - a_{11}\, b_{21}\, a_{33} - b_{11}\, a_{23}\, a_{31} \qquad [23]$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 \\ b_{31} & a_{33} & b_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{23}\, b_{32} \qquad [24]$$

$$\begin{vmatrix} a_{13} & b_{11} & 0 \\ a_{23} & b_{21} & 0 \\ a_{33} & 0 & b_{32} \end{vmatrix} = a_{13}\, b_{21}\, b_{22} - b_{11}\, a_{33}\, b_{32} \qquad [25]$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 \\ a_{31} & 0 & b_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\, b_{21}\, b_{32} \qquad [26]$$

Como por las condiciones ya impuestas los determinantes [23], [24], [25], [26] son distintos de cero, la ecuación es identificable, de donde se deduce que todas las ecuaciones son identificables.

Llegando a este punto, y con objeto de completar la exposición de la identificación, debemos proceder a examinar las ecuaciones que han resultado identificadas. Anticipando lo que diremos más extensamente en el punto siguiente, pondremos de relieve que este examen es importante para la elección del método estadístico a adoptar para la estimación de parámetros contenidos en las ecuaciones estructurales, puesto que la estimación de parámetros no se hace ecuación por ecuación, sino simultáneamente.

Esto dicho, expongamos el concepto de ecuación "exactamente identificada" o de ecuación "más que" identificada.

Para que una ecuación estructural sea *exactamente identificada* es necesario que el número de las variables exógenas contenidas en el sistema, pero no en la ecuación, resulta inferior en una respecto a las variables endógenas que figuran en la ecuación que se considera. Por otra parte, si el número de las variables exógenas contenidas en el sistema, pero no en la ecuación, es igual o mayor que el de variables endógenas que aparecen en la ecuación examinada, ésta será *más que identificada.*

Representemos el modelo expuesto anteriormente y comprobemos a qué tipo pertenecen las ecuaciones ya identificadas.

$$a_{11}\,Q_1 + a_{13}\,P_1 + a_{14}\,P_2 + b_{11}\,R = \varepsilon_1 \quad \text{(ecuación de la demanda de algodón)} \qquad [1]$$

$$a_{22}\,Q_2 + a_{23}\,P_1 + a_{24}\,P_2 + b_{21}\,R = \varepsilon_2 \quad \text{(ecuación de la demanda de rayón)} \qquad [2]$$

$$a_{31}\,Q_1 + a_{33}\,P_1 + b_{32}\,C_1 = \varepsilon_3 \quad \text{(ecuación de la oferta de algodón)} \qquad [3]$$

$$a_{43}\,Q_2 + a_{44}\,P_2 + b_{43}\,C_2 + b_{44}\,P_3 = \varepsilon_4 \quad \text{(ecuación de la oferta de rayón)} \qquad [4]$$

La ecuación de la demanda de algodón y la de rayón, indicadas, respectivamente, por [1] y [2], contiene cada una tres variables endógenas; las variables exógenas que aparecen en el sistema, pero no en la ecuación examinada, son iguales; es evidente que estas dos demandas son "más que identificadas". Lo mismo podría decirse de la ecuación de oferta de los tejidos de algodón y rayón, ya que mientras la primera de ellas contiene un número de variables endógenas (dos) inferior al de las exógenas no contenidas en ella (tres en número), y en la segunda, es decir, la [4], el número de las variables endógenas es igual al de exógenas. Todas las ecuaciones del modelo son, pues, "más que identificadas".

Repitiendo cuanto se ha dicho al principio de la lección, la estimación de los parámetros es posible sólo si las ecuaciones estructurales son identificables. En caso contrario, o sea, cuando un modelo resultase completamente o parcialmente identificado, no es posible estimar los parámetros; aunque el investigador tenga a su disposición un número de observaciones empíricas grande, referentes a las variables que estamos examinando. En el caso que un modelo fuese identificado en parte —o sea, sólo algunas de las ecuaciones estructurales resultan identificables—, no por eso el econometrista debe llegar a una conclusión.

LECCION VI

LA ESTIMACION DE PARAMETROS

a) *El método de mínimos cuadrados.*

Después de haber considerado el problema de la identificación de las ecuaciones estructurales, afrontaremos ahora el de la estimación de parámetros examinando dos de los métodos estadísticos empleados por los economistas para la estimación de los coeficientes que aparecen en las relaciones económicas: el *método de los mínimos cuadrados* y el de la *máxima verosimilitud.* En esta forma designaremos estos métodos estadísticos particulares de los que hemos hablado frecuentemente en las lecciones anteriores.

Sin duda, la medición de los parámetros contenidos en el modelo económico es uno de los más importantes problemas que el econometrista debe abordar. Aquí debemos recordar cuanto habíamos dicho en la primera lección a propósito de los fines que el estudioso se propone investigar; con el empleo del modelo debemos reconocer que la solución de este problema es predominante.

¿Pero cómo se pueden obtener los valores numéricos de los parámetros desconocidos? Anteriormente hemos anunciado que construído un modelo econométrico y disponiendo de observaciones empíricas relativas a los fenómenos particulares es posible, mediante la aplicación de procedimientos estadísticos particulares, medir el valor de los parámetros contenidos en las relaciones. Referente a las observaciones empíricas, vale la pena decir que se pueden obtener de dos fuentes. La primera por medio de los "datos publicados". La mayor parte de las estadísticas disponibles referentes al precio, salarios, producción, renta, beneficios, etc., se publican en forma de series cronológicas constituyendo lo que se llaman series temporales. Por otra parte, el investigador puede recurrir a la "observación directa" por medios de estudios del presupuesto del consumidor, de las funciones de costo de las empresas industriales, y también por medio del muestreo, lo que nos suministrará información relativa respecto a un instante determinado.

Pasando a la distinción operada entre modelos no estocásticos y estocásticos, debemos decir que, mientras en los primeros es posible determinar de forma unívoca los parámetros siempre que se disponga de un número de observaciones suficientes, para los estocásticos se deberá determinar también la distribución de probabilidad de los componentes estocásticos. Y como la determinación de los verdaderos valores de los parámetros presupone el conocimiento de la población total —mientras dispongamos de una muestra de observaciones empíricas—, es evidente que deberemos contentarnos, tomando como base los datos estadísticos que poseemos, con una estimación de los mismos.

Puesto que según sea el procedimiento empleado por el econometrista se pueden obtener diversas estimaciones de los parámetros desconocidos, aunque sean los mismos datos estadísticos, es evidente que para juzgar la bondad de las estimaciones será necesario poseer un criterio de elección.

Recordando que cualquier estimación presenta un error respecto al valor verdadero —como el econometrista no conoce la población total, sino una muestra formada por las observaciones empíricas—, no es posible juzgar la bondad de la estimación a partir de la magnitud de su error por no conocerse el valor verdadero y, por lo tanto, el error. Por otra parte, el estudioso no se preocupa de conocer cuál será la mejor estimación en un solo caso, sino cuál será el mejor procedimiento a adoptar para obtener las mejores estimaciones de un grupo cualquiera de observaciones respecto al problema que examinamos. En otras palabras, la bondad de un procedimiento de estimación depende de la medida en que los valores que proporcionan se aproximan al verdadero.

Diremos que una estimación θ de un parámetro es *consistente* o que converge estocásticamente al valor verdadero θ_0, cuando al tender a infinito el número de observación es N (o tamaño de la muestra) cada vez es más probable que el error $(\theta_0 - \theta)$ sea menor que un número ε tan pequeño como se quiera.

La consistencia puede obtenerse de dos formas: o el valor medio de θ es θ_0, cualquiera que sea N y entonces se dice que la estimación es "absolutamente correcta", o el valor medio de θ no es θ_0, pero tiende a θ_0 cuando $N \rightarrow \infty$, y entonces la estimación se llama "correcta".

Como es posible la existencia de diversas estimaciones consistentes, la mejor de ellas recibe el nombre de "eficiente" y el criterio para clasificarla así viene dado por la magnitud de su varianza; se llama eficiente a aquella estimación que le hace mínima.

Otro carácter importante de las estimaciones es el de la suficiencia que se tiene cuando la varianza de θ, que por la eficiencia debe ser mínima es independiente del verdadero valor θ_0. La importancia de esta propiedad resulta evidente, ya que siendo θ_0 desconocido su presencia en la varianza impediría el cálculo.

De cuanto llevamos dicho se verá que se tiende a adoptar los métodos estadísticos que suministran estimaciones eficientes y suficientes. Sin embargo, a causa de las complicaciones en los cálculos, se adoptan procedimientos de estimación que no tienen todas las características enumeradas. Añadamos que para conocer la eficiencia y consistencia de un método de estimación hay que conocer totalmente la distribución de la población. Generalmente, nos referimos a poblaciones con distribución normal.

Después de habernos ocupado brevemente de las principales características que concurren en la estimación de los parámetros, trataremos de forma general el método de los mínimos cuadrados y el de la máxima verosimilitud —que será desarrollado en las lecciones sucesivas—; deseamos exponer sucintamente algunas características de los procedimientos de estimación.

El primero de los métodos de estimación empleados por los estudiosos se basa en el criterio de la equivalencia.

La estimación de los parámetros, tomando como base el primer criterio, deberá satisfacer la condición que la suma de una cierta función simétrica de las desviaciones entre los valores de la variable dependiente y los valores calculados en la función ajustada resulte mínima. Indicaremos por X_i el valor observado y por X'_i el correspondiente valor ajustado; la condición dicha puede expresarse de la forma siguiente:

$$\Sigma f (X_i - X'_i) = \text{mínimo.}$$

Por otro lado, la aplicación del criterio de la equivalencia a la estimación de parámetros, presupone que la función simétrica no se altera cuando los valores observados se sustituyen por los calculados; es decir:

$$f(X_1, X_2, \ldots) = f(X'_1, X'_2 \ldots).$$

Entre los procedimientos estadísticos basados en el principio de la equivalencia, consideraremos el método de los "mínimos cuadrados" que satisface la condición de hacer mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones, o sea:

$$\Sigma (X_i - X'_i)^2 = \text{mínimo.}$$

Este método presupone que la estimación de parámetros se realiza en ecuaciones que contienen una sola variable dependiente y una o varias independientes. Dado un sistema de ecuaciones la estimación de los parámetros contenidos en ellas puede realizarse de dos formas diferentes:

1.ª Elegida la variable dependiente, la estimación de parámetros se efectúa ecuación por ecuación.

2.ª Antes de estimar los parámetros, el sistema se expresa en forma reducida; o sea, las ecuaciones contienen una sola variable dependiente.

En ambos casos las condiciones de mínimo se buscan separadamente para las variables independientes. Vale la pena poner de manifiesto que con la adopción de la forma reducida se tiene en cuenta la interdependencia existente entre las distintas ecuaciones estructurales. En efecto, como se recordará de los ejemplos de lecciones anteriores, en el segundo miembro de cualquier ecuación en forma reducida aparecen las variables independientes (es decir, exógenas y predeterminadas), incluídas en el sistema considerado.

Al método estadístico, basado en el principio de la equivalencia, se ha añadido, recientemente, procedimientos particulares de estimación que no tienen nada en común con el principio expuesto. Este procedimiento, ideado por R. A. Fisher, se llama "el método de la máxima verosimilitud"; se puede aplicar a cualquier problema de estimación. Antes de proceder a la exposición de este nuevo método, parece conveniente definir el concepto de verosimilitud.

Si se calcula, tomando como base varias hipótesis, la probabilidad de que una variable causal tome un determinado valor, esta probabilidad se considera como "verosimilitud de la hipótesis". Si debemos estimar un parámetro se forma, tomando como base los valores observados de las variables, la función de verosimilitud que indica la verosimilitud de todas las posibles hipótesis (es decir, todos los valores posibles del parámetro o parámetros), y se pone como condición que esta probabilidad sea máxima.

El ejemplo típico es el del número θ de bolas blancas contenidas en una urna, que contiene n bolas, tomando como base el resultado de N extracciones con reemplazamiento. Si la urna contuviese θ bolas blancas entre las n, la probabilidad de obtener una bola blanca sería $\frac{\theta}{n}$, la probabilidad de r bolas blancas sería:

$$\binom{N}{r}\left(\frac{\theta}{n}\right)^r\left(1-\frac{\theta}{n}\right)^{N-r}$$

Esta expresión de la verosimilitud de θ cuando se han obtenido, efectivamente, r bolas blancas, y el método de estimar θ es hacer máximo:

$$\binom{N}{r}\left(\frac{\theta}{n}\right)^r\left(1-\frac{\theta}{n}\right)^{N-r}$$

El método de la máxima verosimilitud, aplicado para estimar los parámetros contenidos en un sistema dado de ecuaciones, consisten en determinar los parámetros, cuyos valores hagan máxima la verosimilitud, tomando como base las observaciones, y teniendo en cuenta la distribución de probabilidad de la componente estocástica contenida en una sola ecuación, sin distinguir la variable dependiente de las independientes.

Según que el investigador considere toda la información "a priori" que tiene a su disposición o una parte de ella tendremos, respectivamente, el método *de la máxima verosimilitud con información completa* y el método *de la máxima verosimilitud con información limitada*. Este último se le conoce también como método de la "máxima verosimilitud en forma reducida", ya que se adopta para la estimación de parámetros ecuación por ecuación, después de haber expresado el sistema en forma reducida.

Llegados a este punto podríamos preguntar: ¿Este método de estimación conduce a estimaciones consistentes eficientes y suficientes?

Pues bien, traduciendo a palabras la correspondiente demostración analítica, podríamos decir que si existe una estimación eficiente y suficiente, ésa se obtiene por el método de la máxima verosimilitud. Por otra parte, la estimación obtenida adoptando este método estadístico puede ser consistente.

Consecuentemente, gozan de estas propiedades las estimaciones obtenidas por otro método, que coincidan con las obtenidas por el método de la máxima verosimilitud.

Hay que hacer notar que el carácter de eficiencia debe considerarse primordial respecto a todas las otras estimaciones que gozan de la misma información. Así la estimación obtenida por el método de la máxima verosimilitud con información limitada será eficiente respecto a cualquier otra obtenida, considerando separadamente ecuaciones en forma reducida; por otra parte, resultará menos eficiente que la estimación obtenida con el método de la máxima verosimilitud con información completa.

Después de haber examinado brevemente las características de la estimación de parámetros debidos a dos procedimientos estadísticos, examinaremos el método de los mínimos cuadrados.

Consideremos, a tal fin, una sola ecuación en forma lineal que expresa la variable Y como función de un número dado de otras variables: Z_i ($i = 1, 2, \ldots k$) con parámetros A_i, y una componente estocástica ε:

$$Y = (Z_i;\ A_i;\ \varepsilon)\,.$$

Sustituyendo las variables por sus desviaciones respecto su media aritmética, tendremos:

$$y = \sum_{i=1}^{K} A_i\, z_i + \varepsilon\,. \qquad [1]$$

Siendo A_i los parámetros que hay que estimar.

Supongamos que nos han dado los valores observados de las $k + 1$ variables (o sea, la endógena y las exógenas) en N unidades sucesivas de tiempo e indicamos por $y(t)$ y $z_i(t)$, respectivamente, los valores de las variables dependientes e independientes. en el tiempo t ($t = 1, 2, \ldots$ N). La condición que debe de satisfacer el método de los mínimos cuadrados es la siguiente:

$$\Sigma\ \varepsilon^2\ (t) = \text{mínimo}$$

que por la [1] se convierte:

$$\varepsilon = y - \sum_{i=1}^{K} A_i\, z_i$$

desarrollando la sumatoria e introduciendo el factor tiempo, tendremos:

$$\sum_{1}^{N} \varepsilon^2(t) = \sum_{t=1}^{N} \{y(t) - A_1 z_1(t) - A_2 z_2(t) - \\ - \ldots - A_K z_K(t)\}^2 = \text{mínimo} \qquad [1a]$$

y esto se consigue igualando a cero la primera derivada respecto a los distintos parámetros A_i. La derivada primera de [1a] respecto A_i igualada a cero, será:

$$2 \sum_{t=1}^{N} \left[y(t) - A_1 z_1(t) - A_2 z_2(t) - \ldots - A_K z_K(t) \right] \frac{\delta}{\delta A_i}\ .$$

$$.\ [\ y(t) - A_1 z_1(t) - \ldots - A_K z_K(t)\ ]$$

Teniendo en cuenta que el primer paréntesis expresa $\varepsilon(t)$; que la derivada de la expresión contenida en el paréntesis es $z_i(t)$ (ya que la derivada de A_i es uno), dividiendo por dos tendríamos:

$$\sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)\, z_i(t) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, K\,. \qquad [1b]$$

Sustituyendo en [1b], $\varepsilon(t)$ por su valor, tendremos:

$$\sum_{t=1}^{N} z_i(t)\, [y(t) - A_1 z_1(t) - A_2 z_2(t) - \ldots - A_K z_K(t)] = 0$$

de donde:

$$\sum_{t=1}^{N} z_i(t)\, y(t) - A_1 \sum_{t=1}^{N} z_1(t)\, z_i(t) - A_2 \sum_{t=1}^{N} z_2(t)\, z_i(t) -$$

$$- \ldots - A_K \sum_{t=1}^{N} z_i(t)\, z_K(t) = 0$$

o sea:

$$\sum_{t=1}^{N} z_i(t)\, y(t) = A_1 \sum_{t=1}^{N} z_1(t)\, z_i(t) + \ldots +$$

$$+ A_K \sum_{t=1}^{N} z_i(t)\, z_K(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, K)\,. \qquad [1c]$$

El sistema de K ecuaciones con K incógnitas (los parámetros estimados A_i) requiere para su solución el conocimiento del determinante de los coeficientes de las incógnitas, para lo cual llamaremos:

$$H_{ij} = \sum_{t=1}^{N} z_i(t)\, z_j(t)$$

y resultará:

$$H = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots\cdots & H_{1K} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots\cdots & H_{2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{K1} & H_{K2} & \cdots\cdots & H_{KK} \end{vmatrix}$$

Haciendo:

$$F_i = \sum_{t=1}^{N} z_i(t)\, y(t)$$

tendremos, aplicando la regla de Cramer como valores de A_i:

$$A_i = \frac{\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1,i-1} & F_1 & H_{1,i+1} & \dots & H_{1K} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2,i-1} & F_2 & H_{2,i+1} & \dots & H_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{K1} & H_{K2} & \dots & H_{K,i-1} & F_K & H_{K,i+1} & \dots & H_{KK} \end{vmatrix}}{H}. \qquad [2]$$

Si designamos por H^{ij} el adjunto de H_{ij} dividido por H, y si desarrollamos el numerador por los adjuntos de la columna iésima, tendremos:

$$A_i = F_1 H^{11} + F_2 H^{21} + \dots + F_K H^{ki} = \sum_{j=1}^{K} F_j H^{ji}. \qquad [2a]$$

Para el cálculo de la suma de cuadrados de las desviaciones resultantes entre los valores observados de las variables dependientes (y) y las de la ecuación, se empleará la fórmula:

$$\begin{aligned} Q = \sum_{t=1}^{N} \varepsilon^2(t) &= \sum_{t=1}^{N} [y(t) - A_1 z_1(t) - A_2 z_2(t) - \\ &- \dots - A_K z_K(t)]\, \varepsilon(t) = \sum_{t=1}^{N} y(t)\, \varepsilon(t) - \\ &- A_1 \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)\, z_1(t) - A_2 \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)\, z_2(t) - \\ &- \dots - A_K \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)\, z_K(t) \end{aligned} \qquad [3]$$

como todas las sumas son nulas, excepto la primera por [1b], [3] será igual a:

$$Q = \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)\, y(t)$$

y sustituyendo $\varepsilon(t)$ por su valor dado anteriormente:

$$\sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)\, y(t)$$

tomará la forma:

$$\begin{aligned} Q = \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)\, y(t) &= \sum_{t=1}^{N} [y(t) - A_1 z_1(t) - A_2 z_2(t) - \\ - \ldots - A_K z_K(t)]\, y(t) &= \sum_{t=1}^{N} y(t)\, y(t) - A_1 \sum_{t=1}^{N} z_1(t)\, y(t) - \\ - A_2 \sum_{t=1}^{N} z_2(t)\, y(t) - \ldots &- A_K \sum_{t=1}^{N} z_K(t)\, y(t) = \\ &= \sum_{t=1}^{N} [y(t)]^2 = A_1 F_1 - A_2 F_2 - \ldots - A_K F_K . \end{aligned} \quad [3a]$$

Habíamos considerado la aplicación del método de los mínimos cuadrados a un modelo constituído por una sola ecuación. Ahora bien, en el caso que un modelo comprendiese distintas ecuaciones y se desease estimar los parámetros simultáneamente (y no ecuación por ecuación, cada una independiente de la otra). La aplicación del método de los mínimos cuadrados exige la transformación del sistema en uno de forma reducida.

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_G$ las variables endógenas del sistema con parámetros b_i, $z_1, z_2, \ldots, z_K$ las exógenas, con parámetros c_i. Entonces las G ecuaciones (tal como habíamos dicho otras veces, el número de ecuaciones que figuran en un modelo debe ser igual al de las variables endógenas) tomarán la forma:

$$\sum_{s=1}^{G} b_{js}\, y_s + \sum_{i=1}^{K} c_{ji}\, z_i = \varepsilon_j \quad (i = 1, 2, \ldots, G) \quad [4]$$

en donde el índice j de los parámetros b y c indica que son relativas a las variables endógenas y exógenas que aparecen en la ecuación j-ésima, la s indica el número de la variable endógena y el i el de la exógena.

Resolver el sistema [4] respecto las y_s significa expresarlo en forma reducida, con lo que cada y_s vendrá expresada por una ecuación lineal, en el que en el segundo miembro aparecen todas las variables exógenas contenidas en el modelo, o sea, una ecuación del tipo:

$$y_s = \sum_{i=1}^{G} A_{si} z_i + \eta_s \qquad (s = 1, 2, ..., G) \qquad [4a]$$

en donde A_{si} depende de las c_{ji}, b_{js} y las η_s de las ε_j y de las b_{js}.

Para la estimación de los parámetros A_{si}, contenidos en las distintas ecuaciones [4a], se seguirá el procedimiento dado precedentemente, poniendo:

$$F_{si} = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, z_i(t)$$

en lugar de:

$$F_i = \sum_{t=1}^{N} y(t)\, z_i(t)\ .$$

De esta forma, y siguiendo una marcha análoga a la que indicamos en el caso en que había de estimar los parámetros que se encuentran en un modelo compuesto de una sola ecuación, tendremos las siguientes relaciones:

$$\sum_{r=1}^{N} A_{sr} H_{ri} = F_{si} \qquad (s = 1, ..., G,\ i = 1, ..., K) \qquad [4b]$$

y de aquí la fórmula que determinan los parámetros:

$$A_{sr} = \sum_{i=1}^{K} F_{sr} H^{ri} \qquad [4c]$$

que permitan estimar los valores de los distintos parámetros (A_{ji}) contenidos en el modelo, puesto en forma reducida.

Para determinar la magnitud de la componente aleatoria, deberemos calcular la suma de los productos de tales variables, adoptando la fórmula siguiente, que recuerda la de [4a]:

$$\eta_s = y_s - \sum_{i=1}^{K} A_{si} z_i$$

$$
\begin{aligned}
Q_{sr} = \sum_{t=1}^{N} \eta_s(t)\,\eta_r(t) = \sum_{t=1}^{N} [y_s(t) - A_{s1}\, z_1(t) - \\
- \ldots - A_{sK}\, z_K(t)]\,\eta_r(t) = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\,\eta_r(t) - \\
- A_{s1} \sum_{t=1}^{N} z_1(t)\,\eta_r(t) - \ldots - A_{sK} \sum_{t=1}^{N} z_K(t)\,\eta_r(t)\,.
\end{aligned}
\qquad [5]
$$

Como todas las sumas posteriores a la primera son iguales a cero (en virtud de [1b], ya que la derivada primera respecto a las A_i son nulas), tendremos:

$$
\begin{aligned}
Q_{sr} = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\,\eta_r(t) = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\,[y_r(t) - \\
- A_{r1}\, z_1(t) - \ldots - A_{rK}\, z_K(t)] = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, y_r(t) - \\
- A_{r1}\, F_{s1} - \ldots - A_{rK} F_{sK} = E_{sr} - \sum_{t=1}^{K} A_{rj}\, F_{sj}
\end{aligned}
\qquad [5]
$$

siendo:

$$E_{sr} = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, y_r(t)\,.$$

Puesto que la estimación de los parámetros, obtenida mediante la aplicación de las [4c], se refiere a la forma reducida en que se ha puesto el modelo original. Como el modelo original se ha expresado en forma estructural, puede parecer oportuno determinar los parámetros de la forma estructural a partir de los de la forma reducida. Ahora bien, refiriéndose a la *j*-ésima ecuación estructural, y suponiendo que éste contenga sólo H de las G variables endógenas, es decir, y_1, y_2, ..., y_H. Y por otra parte, dividamos las K variables exógenas, que indicamos por z_i, en dos grupos: uno u_1, u_2, ..., u_F, que son las variables que aparecen en la ecuación (la *j*-ésima), y por v_1, v_2, ..., v_D aquellas que no aparecen.

La *j*-ésima ecuación estructural tomará la forma:

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js}\, y_s + \sum_{i=1}^{F} c_{ji}\, u_i = \varepsilon_j \qquad [6]$$

mientras la expresión de y_s en forma reducida, será:

$$y_s = \sum_{i=1}^{F} A_{si} u_i + \sum_{r=1}^{D} B_{sr} v_r + \eta_s \qquad [6a]$$

en la cual, a diferencia de lo que ocurre en la ecuación estructural, aparecerán las variables exógenas que aparecen en las otras ecuaciones —variables que expresamos por la letra v_i.

Sustituyendo las y_s de la ecuación [6] por las expresiones [6a], tendremos:

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} \left(\sum_{i=1}^{F} A_{si} u_i + \sum_{r=1}^{D} B_{sr} v_r + \eta_s \right) + \sum_{i=1}^{F} c_{ji} u_i = \varepsilon_j$$

o sea:

$$\sum_{i=1}^{F} \sum_{s=1}^{H} b_{js} A_{si} u_i + \sum_{s=1}^{H} \sum_{r=1}^{D} b_{js} B_{sr} v_r + \sum_{s=1}^{H} b_{js} \eta_s +$$

$$+ \sum_{s=1}^{F} c_{ji} u_i = \varepsilon_j$$

o sea:

$$\sum_{i=1}^{F} u_i \sum_{s=1}^{H} b_{js} A_{si} + \sum_{r=1}^{D} v_r \sum_{s=1}^{H} b_{js} B_{sr} +$$

$$\sum_{i=1}^{F} c_{ji} u_i + \sum_{s=1}^{H} b_{js} \eta_s + \varepsilon_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{F} u_i \left(\sum_{s=1}^{H} b_{js} A_{si} + c_{ji} \right) + \sum_{r=1}^{D} v_r \sum_{s=1}^{H} b_{js} B_{sr} +$$

$$+ \left(\sum_{s=1}^{H} b_{js} \eta_s - \varepsilon_j \right) = 0.$$

Para que esta expresión sea igual a cero, es evidente que los coeficientes de las u_i, v_r y del último término, deben ser nulos, o sea:

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} A_{si} + c_{ji} = 0 \quad (i = 1, \ldots, F) \qquad [6b]$$

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} B_{sr} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, D) \qquad [6c]$$

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} \eta_s - \varepsilon_j = 0 \, . \qquad [6d]$$

De las [6c] se obtienen los coeficientes b_{ji}. Además, teniendo en cuenta los valores asignados a $r (r = 1, 2, \ldots, D)$ y a $s (s = 1, 2, \ldots, H)$ de la [6c], deducimos que es un sistema compuesto por D ecuaciones y H incógnitas, que podríamos reducir a $H - 1$, ya que por ser ecuaciones homogéneas será posible dividir todos los parámetros por una constante y hacer así uno de ellos iguales a $+1$ ó -1. Por lo tanto, *sólo si se trata de un sistema exactamente identificado* (*se recuerda la condición* $D = H - 1$) *es posible pasar de la forma reducida a la estructural.*

Estimados los coeficientes b_{js} de la [6b] se calculan los parámetros c_{ji}. La [6d] expresa la componente errática de la ecuación j-ésima mediante la variable aleatoria de las distintas ecuaciones en forma reducida y relativa a las variables endógenas contenidas en esas ecuaciones.

Si el sistema resultase más que identificado, es decir, $D > H - 1$, *no será posible obtener de* [6c] *los coeficientes* b_{js}, *ya que tendríamos más ecuaciones que incógnitas; o sea, el sistema es incompatible. En este caso, no pudiendo estimar los parámetros estructurales mediante el método de los mínimos cuadrados, se debe recurrir al método de la máxima verosimilitud.*

LECCION VII

ESTIMACION DE PARAMETROS

b) *El método de la máxima verosimilitud con información limitada.*

En la lección precedente, además de exponer algunas de las características de las estimaciones mínimo cuadráticas, habíamos hablado de las propiedades de máxima verosimilitud. Como ya se ha dicho, este método ha sido ideado por R. A. Fisher, al principio del siglo XX. Sus aplicaciones para estimar los parámetros contenidos en las relaciones económicas es reciente, y las primeras aplicaciones han sido de la "Cowles Commission".

Como se ha dicho en las páginas precedentes, *según que el investigador considere toda la información existente "a priori" o considere sólo una parte de ella, le llevará a considerar: el método de la máxima verosimilitud, con información completa, o la máxima verosimilitud, con información limitada (o forma reducida).* El método de la máxima verosimilitud, con información limitada —será el que consideremos en la presente lección—, se llama así porque transforma el modelo original en uno en forma reducida, y como cada ecuación del nuevo sistema contiene una sola variable endógena, cuando se estiman los parámetros no se tiene en cuenta la información "a priori" que se posea de las otras variables endógenas, que aparecen en las restantes ecuaciones económicas. La preferencia que muestran los econometristas por el método de la máxima verosimilitud con información limitada, en lugar de la información completa, deriva del hecho de que este último, aunque posee mayores propiedades estadísticas, es muy complicado de cálculo, ya que deben resolverse ecuaciones no lineales.

En forma general, consideraremos el método de la máxima verosimilitud con información limitada.

A este respecto examinemos el sistema de ecuaciones expuesto en la lección precedente, y que hemos designado con [4], en donde y_1, y_2, ..., y_G son variables endógenas, b_i son los parámetros respectivos, z_1, z_2, ..., z_K las variables exógenas con coeficientes c_i:

$$\sum_{s=1}^{G} b_{js}\, y_s + \sum_{i=1}^{K} c_{ji}\, z_i = \varepsilon_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, G)\ . \tag{4}$$

Como ya habíamos dicho, ε_j es la componente aleatoria, con distribución normal y media cero relativa a la ecuación *j*-ésima. La probabilidad de que las ε_j toman los valores $\varepsilon_j(t) + d\,\varepsilon_j(t)$ $(j = 1, \ldots, G;\ t = 1, \ldots, N)$ es una función de tales valores. Sustituyendo $\varepsilon_j(t)$ por sus expresiones en [4], la probabilidad será función de las $y_s(t)$, de las $z_i(t)$ y de los parámetros a estimar b_{js} y c_{ji}. Esta probabilidad es la función de verosimilitud que deberá hacerse máxima mediante la aplicación del método de la máxima verosimilitud con información limitada.

Haciendo máxima la función de verosimilitud se obtiene, en el caso que la covarianza sea nula, una condición análoga a las de los mínimos cuadrados:

$$\sum_{s=1}^{N} \frac{1}{\sigma_{ss}} \sum_{t=1}^{N} [\eta_s(t)]^2 = \text{mínimo}$$

en donde σ es el símbolo de la desviación típica.

De esta forma, la estimación de los parámetros resultantes en las ecuaciones en forma reducida se efectuará, en parte, siguiendo el procedimiento del método de los mínimos cuadrados. No obstante, antes de estimar los coeficientes, es conveniente efectuar alguna transformación para simplificar los cálculos.

Consideremos de nuevo la *j*-ésima ecuación de nuestro sistema, y supongamos que contiene H de las G variables endógenas; es decir: $y_1, y_2, \ldots, y_H$. Por otra parte, consideremos las K variables exógenas que en la [4] indicábamos por z_i, en dos grupos: designando por $u_1, u_2, \ldots, u_F$ a las contenidas en la ecuación y por $v_1, v_2, \ldots, v_D$ aquellas que no aparecen.

La *j*-ésima ecuación estructural tomará la forma:

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js}\, y_s + \sum_{i=1}^{F} c_{ji}\, u_i = \varepsilon_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, G) \qquad [6]$$

y poniendo y_s en forma reducida, obtendremos:

$$y_s = \sum_{i=1}^{F} A_{si}\, u_i + \sum_{r=1}^{D} B_{sr}\, v_r + \eta_s \qquad [6a]$$

en la cual, a diferencia de lo que ocurre en la ecuación estructural, aparecen variables exógenas que se encuentran en otras ecuaciones del modelo.

Sustituyamos ahora las variables v_i por las s_i que sean ortogonales a las u_i, es decir, tal que:

$$\sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, s_h(t) = 0\,.$$

Antes de calcular las s_i, observemos que habiendo dividido las variables exógenas z_i en dos grupos: u_i y v_i (esto es, variables exógenas que figuran en la *j*-ésima ecuación, y en otras ecuaciones del sistema), las cantidades:

$$\mathrm{H}_{ij} = \sum_{t=1}^{N} z_i(t)\, z_j(t)$$

habrán de considerarse divididas en dos grupos:

$$\sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, u_j(t) \qquad \text{que llamaremos } \mathrm{H}_{ij}$$

$$\sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, v_j(t) \qquad \text{que llamaremos } \mathrm{J}_{ij}$$

$$\sum_{t=1}^{N} v_i(t)\, v_j(t) \qquad \text{que llamaremos } \mathrm{K}_{ij}\,.$$

La ortogonalidad pedida se obtiene haciendo:

$$s_i = v_i - \sum_{r=1}^{F} \sum_{s=1}^{F} \mathrm{J}_{ri}\, \mathrm{H}^{rs} u_s\,. \qquad [7]$$

Para demostrar que las s_i son ortogonales a las u_i, escribamos:

$$\sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, s_h(t) = \sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, [v_h(t) -$$

$$- \sum_{r=1}^{F} \sum_{s=1}^{F} \mathrm{J}_{rh}\, \mathrm{H}^{rs} u_s(t)\,] = \sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, v_h(t) -$$

$$- \sum_{r=1}^{F} \sum_{s=1}^{F} \mathrm{J}_{rh}\, \mathrm{H}^{rs} \sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, u_s(t)\,.$$

Como

$$\sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, v_h(t)$$

es igual a J_{ih} y

$$\sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, u_s(t)$$

es igual a H_{is}, la expresión anterior tomará la forma:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(t)\, s_h(t) = J_{1h} - \sum_{r=1}^{F} \sum_{s=1}^{F} J_{rh} H^{rs} H_{1s} =$$

$$= J_{1h} - \sum_{r=1}^{F} J_{rh} \sum_{s=1}^{F} H^{rs} H_{1s} .$$

La expresión:

$$\sum_{s=1}^{F} H^{rs} H_{1s}$$

es nula, ya que son los adjuntos de una fila por los elementos de una paralela a ella, salvo cuando $r = 1$, que entonces es 1.

La [7a], después de haber sustituído el índice r de J_{rh} por los valores 1, 2, ..., F y el valor cero en

$$\sum_{s=1}^{F} H_{1s} H^{rs}$$

se reduce a:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(t)\, s_h(t) = J_{1h} - (J_{1h} \,.\, 0 + \dots + J_{1h} \,.\, 1 + + \dots + J_{F,h} \,.\, 0) = J_{1h} - J_{1h} = 0 . \qquad [7b]$$

Por lo tanto, la forma reducida de y_s, o sea:

$$y_s = \sum_{i=1}^{F} A_{si} u_i + \sum_{r=1}^{D} B_{sr} v_r + \eta_s \qquad [6a]$$

después de haber sustituído v_r por la expresión:

$$v_r = s_r + \sum_{h=1}^{F} \sum_{k=1}^{F} J_{hr} \,.\, H^{hk} u_k$$

resultará igual a:

$$y_s = \sum_{i=1}^{F} A_{si} u_i + \sum_{r=1}^{D} B_{sr} (s_r + \sum_{h=1}^{F} \sum_{k=1}^{F} J_{hr} H^{hk} u_k) + \eta_s =$$

$$= \sum_{i=1}^{F} A_{si} u_i + \sum_{r=1}^{D} B_{sr} s_r + \sum_{r=1}^{D} B_{sr} \sum_{h=1}^{F} \sum_{k=1}^{F} J_{hr} H^{hk} u_k + \eta_s =$$

$$= \sum_{i=1}^{F} u_i (A_{si} + \sum_{r=1}^{D} B_{sr} \sum_{h=1}^{F} J_{hr} H^{hi}) + \sum_{r=1}^{D} B_{sr} s_r + \eta_s$$

y poniendo:

$$A_{si} + \sum_{r=1}^{D} B_{sr} \sum_{h=1}^{F} J_{hr} H^{hi} = N_{si}$$

obtendremos:

$$y_s = \sum_{i=1}^{F} N_{si} u_i + \sum_{r=1}^{D} B_{sr} s_r + \eta_s . \qquad [8]$$

En las ecuaciones en forma reducida, y que designaremos por [8], los valores de los parámetros N_{si} y B_{sr} se determinarán mediante el empleo de ecuaciones análogas a [4b], expuesta en el tratamiento de los mínimos cuadrados. A este respecto debemos observar que la cantidad indicada en la lección precedente con

$$F_{si} = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, z_i(t) ,$$

o sea, la suma de los productos de las variables endógenas por una exógena —debemos clasificarla en dos grupos, ya que las variables exógenas $z_i(t)$ están divididas en dos categorías: las que aparecen *en la ecuación j-ésima* u_i y las variables que aparecen en las otras *ecuaciones* del modelo v_i. Sin embargo, indicaremos por

$$F_{si} = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, u_i(t) \qquad y \qquad \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, v_i(t)$$

por G_{si}. Sustituyendo ahora las v_i por las s_i —cuyos valores se dan en la [7]—, las G_{si} *tomarán una* nueva forma, que indicaremos con la letra L_{si}:

$$L_{si} = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, s_i(t) = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, [v_i(t) -$$

$$- \sum_{r=1}^{F} \sum_{k=1}^{F} J_{ri} H^{rk} u_k(t)] = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, v_i(t) -$$

$$- \sum_{r=1}^{F} \sum_{k=1}^{F} J_{ri} H^{rk} \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, u_k(t)$$

ahora bien, como

$$\sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, v_i(t)$$

es igual a

$$G_{si}\ y \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, u_k(t)$$

es F_{jk}; la expresión de L_{ji} será:

$$L_{si} = G_{si} = \sum_{r=1}^{P} \sum_{k=1}^{P} J_{ri}\, H^{rk}\, F_{sk}\,. \qquad [9]$$

Pero se recordará que habíamos procedido a dividir la variable exógena en dos grupos: u_i y v_i (las que aparecen en la ecuación *j*-ésima y en otras relaciones del sistema), para lo cual habíamos establecido tres cantidades: H_{ij}, J_{ij} y K_{ij}. Ahora bien, considerando las dos últimas y sustituyendo en

$$\sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, v_j(t) \qquad \text{y en} \qquad \sum_{t=1}^{N} v_i(t)\, v_j(t)$$

—que son J_{ij} y K_{ij}— s_j en lugar de v_j.

$$\sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, s_j(t)$$

vemos que se anula por la condición impuesta a *s* —ya que es variable ortogonal a las *u*—, mientras la cantidad

$$\sum_{t=1}^{N} s_i(t)\, s_j(t)$$

la haremos igual a M_{ij}, que será:

$$M_{ij} = \sum_{t=1}^{N} s_i(t)\, s_j(t) = \sum_{t=1}^{N} \left[v_i(t) - \sum_{r=1}^{P} \sum_{s=1}^{P} J_{ri}\, H^{rs}\, u_s(t) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[v_j(t) - \sum_{h=1}^{P} \sum_{k=1}^{P} J_{hj}\, H^{hk}\, u_k(t) \right] = \sum_{t=1}^{N} v_i(t)\, v_j(t) -$$

$$- \sum_{h=1}^{P} \sum_{k=1}^{P} J_{hj}\, H^{hk} \sum_{t=1}^{N} u_k(t)\, v_i(t) - \sum_{r=1}^{P} \sum_{s=1}^{P} J_{ri}\, H^{rs} \,.$$

$$[10]$$

$$. \sum_{t=1}^{N} u_s(t)\, v_j(t) + \sum_{r=1}^{P} \sum_{s=1}^{P} \sum_{h=1}^{P} \sum_{k=1}^{P} J_{ri}\, H^{rs}\, J_{hj}\, H^{hk} \,. \sum_{t=1}^{N} u_i(t)\, u_k(t)$$

recordando que:

$$\sum_{i=1}^{N} v_i(t)\, v_j(t) = k_{ij} \qquad \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\, v_j(t) = J_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(t)\, u_j(t) = H_{ij}$$

la expresión anterior resultará igual a:

$$\begin{aligned} M_{ij} = k_{ij} &- \sum_{h=1}^{F} \sum_{k=1}^{F} J_{hj} H^{hk} J_{ki} - \sum_{r=1}^{F} \sum_{s=1}^{F} J_{ri} H^{rs} J_{si} + \\ &+ \sum_{r=1}^{F} \sum_{s=1}^{F} \sum_{h=1}^{F} \sum_{k=1}^{F} J_{ri} H^{rs} J_{hj} H^{hk} H_{sk} = k_{ij} - \\ &- \sum_{h=1}^{F} \sum_{k=1}^{F} J_{hj} H^{hk} J_{ki} - \sum_{r=1}^{F} \sum_{s=1}^{F} J_{ri} H^{rs} J_{sj} + \\ &+ \sum_{r=1}^{F} \sum_{s=1}^{F} \sum_{h=1}^{F} J_{ri} H^{rs} J_{hi} + \sum_{k=1}^{F} H^{hk} H_{sk}. \end{aligned} \qquad [10a]$$

Pero

$$\sum_{k=1}^{F} H^{hk} H_{sk}$$

existe (y vale uno para $h = s$), por lo tanto, sustituyendo el límite inferior h de la tercera sumatoría del cuarto sumando, el valor s se simplifica quedando reducido a

$$\sum_{r=1}^{F} \sum_{s=1}^{F} J_{ri} H^{rs} J_{hj}$$

la expresión definitiva de M_{ij} tomará la forma:

$$M_{ij} = K_{ij} - \sum_{h=1}^{F} \sum_{k=1}^{F} J_{hj} H^{hk} J_{ki} \qquad [10b]$$

Esto visto, teniendo en cuenta [8] y la distinción entre las variables exógenas —de las que habíamos obtenido las expresiones

L_{si} y M_{ij}—, las ecuaciones necesarias para la estimación de los parámetros serán

$$\sum_{r=1}^{F} N_{sr} H_{ri} = F_{si} \quad (s = 1, ..., D) \qquad [11]$$

$$\sum_{r=1}^{D} B_{rs} M_{ri} = L_{si} \quad (i = 1, ..., F) . \qquad [12]$$

y de donde obtenemos N_{sr} y B_{sr}.

Para determinar la magnitud de la componente estocástica (η_s) deberemos calcular la suma de los productos de tales variables (que indicaremos por Q_{sr}), adoptando la expresión [1b], y recordando la [8]:

$$\eta_s = y_s - \sum_{i=1}^{F} N_{si} u_i - \sum_{r=1}^{D} B_{sr} s_r$$

$$Q_{sr} = \sum_{t=1}^{N} \eta_s \eta_r (t) = \sum_{t=1}^{N} \left[y_s - \sum_{i=1}^{F} N_{si} u_i - \sum_{r=1}^{D} B_{sr} s_r \right] \eta_r (t) =$$

$$= \sum_{t=1}^{N} y_s (t) \eta_r (t) - N_{s1} \sum_{t=1}^{N} u_1 (t) \eta_r (t) - B_{s1} \sum_{t=1}^{N} s_1 (t) \eta_r (t) -$$

$$- N_{sF} \sum_{t=1}^{N} u_F (t) \eta_r (t) - B_{sD} \sum_{t=1}^{N} s_D (t) \eta_r (t) .$$

Como todas las sumatorias menos la primera son nulas, según [1b], tendremos:

$$Q_{sr} = \sum_{t=1}^{N} y_s (t) \eta_r (t) = \sum_{t=1}^{N} y_s (t) \Big[y_1 - N_{r1} u_1 (t) - B_{11} s_1 (t) -$$

$$- ... - N_{rF} u_F (t) - B_{DD} s_D (t) \Big] = \sum_{t=1}^{N} y_s (t) y_r (t) -$$

$$- N_{r1} \sum_{t=1}^{N} y_s (t) u_1 (t) - B_{11} \sum_{t=1}^{N} y_s (t) s_1 (t) -$$

$$- N_{rF} \sum_{t=1}^{N} y_s (t) u_F (t) - B_{DD} \sum_{t=1}^{N} y_s (t) s_D (t) .$$

Dado que:

$$E_{sr} = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, y_r(t) \qquad F_{si} = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, u_i(t)$$

y

$$L_{si} = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, s_i(t)$$

la anterior expresión, después de haber sacado factor común a los términos N_{si} por una parte y B_{rs} por la otra, tomará la forma definitiva:

$$Q_{rs} = E_{sr} - \sum_{j=1}^{F} N_{rj} F_{sj} - \sum_{j=1}^{D} B_{rj} L_{sj} = E_{sr} - \\ - P_{rs} - \sum_{j=1}^{F} N_{rj} F_{sj} \qquad [13b]$$

después de haber puesto:

$$P_{sr} = \sum_{j=1}^{D} B_{rj} L_{sj}\,.$$

Pero los parámetros determinados por [11] y [12] se refieren a la forma reducida y no a la estructural, con la que se expresa el modelo econométrico. Debemos buscar un procedimiento que permita obtener el valor de los parámetros estructurales, a partir de los de forma reducida.

Como habíamos dicho en la lección precedente, si el número (D) de las ecuaciones del tipo:

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} B_{sr} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, D$$

es mayor que el de las $H - 1$ incógnitas a determinar —nos encontramos en presencia de un sistema irresoluble—, no es posible determinar los parámetros estructurales como en el caso anterior en que $D = H - 1$.

Por lo tanto, sustituyendo en las ecuaciones estructurales:

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js}\, y_s + \sum_{i=1}^{F} c_{ji}\, u_i = \varepsilon_j \qquad (j = 1, \ldots, G) \qquad [6]$$

las y_s por su expresión en [8]:

$$y_s = \sum_{i=1}^{F} N_{si} u_i + \sum_{r=1}^{D} B_{sr} s_r + \eta_s$$

tendremos:

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} \left[\sum_{i=1}^{F} N_{si} u_i + \sum_{r=1}^{D} B_{rs} s_r + \eta_s \right] + \sum_{i=1}^{F} c_{ji} u_i - \varepsilon_j = 0$$

y sacando factor común la u_i, tendremos:

$$\sum_{i=1}^{F} u_i \left(\sum_{s=1}^{H} b_{js} N_{si} + c_{ji} \right) + \sum_{r=1}^{D} s_r \sum_{s=1}^{H} b_{js} B_{sr} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{H} b_{js} \eta_s - \varepsilon_j = 0 .$$

Haciendo nulos los coeficientes de las u_i, tomando como base lo dicho anteriormente, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} N_{si} + c_{ji} = 0 . \qquad [14a]$$

Cuando conozcamos las b_{js} se podrán obtener las c_{ji}. No podemos anular los coeficientes de la s_r (ya que tendríamos un sistema no compatible formado con D ecuaciones y $H - 1$ incógnitas con $D > H - 1$), poniendo la condición que sea mínima la suma del cuadrado de la cantidad:

$$\sum_{t=1}^{N} \left(\sum_{r=1}^{D} s_r \sum_{s=1}^{H} b_{js} B_{sr} \right)^2 = \text{mínimo} \qquad [14b]$$

lo que es equivalente a hacer mínima la cantidad.

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} \eta_s - \varepsilon_j . \qquad [14c]$$

Debemos afrontar un nuevo problema de mínimo, mejor de mínimo condicionado, ya que debemos determinar los valores de b_{js} que hacen mínimo la [14] bajo una condición dada. Como hemos visto ya anteriormente, a las b_{js} se le puede imponer la condición, por ejemplo, que el valor de una b sea -1. Aunque se podría poner cualquier otra condición (por ejemplo, que la suma de las b_{js} será igual a 50).

En nuestro problema el cálculo de las b_{js} se simplifica si se impone la condición:

$$\sum_{s=1}^{H} \sum_{h=1}^{H} b_{js} b_{jh} Q_{sh} = 1 . \qquad [15]$$

Para determinar el mínimo de [14b] condicionado a [15], introduciremos un multiplicador v de Lagrange y haremos mínima la cantidad:

$$\sum_{t=1}^{N} \left[\sum_{s=1}^{H} b_{js} \sum_{r=1}^{D} B_{sr} s_r(t) \right]^2 -$$

$$- v \left[\sum_{s=1}^{H} \sum_{h=1}^{H} b_{js} b_{jk} Q_{jh} \right] = \text{mínimo.} \qquad [16]$$

Para calcular la derivada respecto al parámetro b_{jk}, observemos que dentro del paréntesis rectangular el coeficiente de b_{jk} es:

$$\sum_{r=1}^{D} B_{kr} s_r(t)$$

y en cuanto al segundo término, se tiene:

$$\sum_{s=1}^{H} \sum_{h=1}^{H} b_{js} b_{jh} Q_{sh}$$

en donde b_{jk} se presenta (como primer factor); para $a = k$ tiene como coeficiente:

$$\sum_{h=1}^{H} b_{jh} Q_{kh}$$

y como segundo factor, para $h = k$ con coeficiente:

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} Q_{sk} .$$

En lo que respecta a la derivada del segundo término de la [16], respecto a b_{jk} y la suma de los coeficientes ya dichos, será:

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} Q_{ks} .$$

La derivada de [16], respecto a b_{jk}, será:

$$2 \sum_{t=1}^{N} \left[\sum_{s=1}^{H} b_{js} \sum_{r=1}^{D} B_{sr} s_r(t) \right] \left[\sum_{r=1}^{D} B_{kr} s_r(t) \right] - 2 \nu \left[\sum_{s=1}^{H} b_{js} Q_{ks} \right]$$

que debe ser nula. Para lo cual tendremos la ecuación:

$$\sum_{t=1}^{N} \left[\sum_{s=1}^{H} b_{js} \left(\sum_{r=1}^{D} B_{sr} s_r(t) \sum_{p=1}^{D} B_{kp} s_p(t) \right) \right] -$$

$$- \nu \sum_{s=1}^{H} b_{js} Q_{ks} = 0 \qquad (k = 1, \dots, H)$$

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} \sum_{r=1}^{D} \quad \sum_{p=1}^{D} B_{sr} B_{kp} \sum_{t=1}^{N} s_r(t)\, s_p(t) - \nu \sum_{s=1}^{H} b_{js} Q_{ks} = 0$$

$$\sum_{s=1}^{N} b_{js} \left(\sum_{r=1}^{D} \quad \sum_{p=1}^{D} B_{sr} B_{kp} M_{rp} - \nu Q_{ks} \right) = 0$$

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} \left(\sum_{p=1}^{D} B_{kp} L_{sp} - \nu Q_{ks} \right) = 0$$

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} \left(P_{ks} - Q_{ks} \right) = 0 \qquad (k = 1, \dots, H). \qquad [17]$$

Esta última expresión representa un sistema de H ecuaciones homogéneas con H incógnitas. Tal sistema admite solución si el determinante de los coeficientes es nulo, es decir:

$$| P_{ks} - \nu Q_{ks} | = 0 . \qquad [18]$$

Siendo ν indeterminado lo fijaremos de forma que se satisfaga la [18]. Como la [18] es una ecuación de grado H, en general habrá H raíces. De ésas se toma la más pequeña, ya que puede demostrarse que para ella la [16] tiene un mínimo.

Encontrada la raíz mínima ν se sustituye en [17] e imponiendo una condición cualquiera de normalización ($b_{1j} = -1$), se resuelve el sistema hallando las restantes b_j. La [14a] permite el cálculo de ϵ_j.

LECCION VIII

EXAMEN DE LA DEMANDA Y DE LA OFERTA DE LOS BIENES ALIMENTICIOS EN ITALIA DE 1928 A 1938, MEDIANTE UN MODELO ECONOMETRICO

(con la aplicación del método de los mínimos cuadrados)

Después de cuanto habíamos dicho en las páginas precedentes a propósito del significado y fin de un modelo económico, de la distinción entre el modelo estocástico y no estocástico y del método estadístico a emplear para la estimación de los parámetros contenidos en las relaciones económicas, estimamos es indispensable dar un ejemplo concreto del modelo, sobre todo con objeto de mostrar cómo se aplica el método de estimación considerado en la última lección. En la presente consideramos un modelo econométrico, de naturaleza estocástica, constituído para examinar la demanda y la oferta de los bienes alimenticios en Italia de 1928 a 1938.

Corrientemente, en el estudio referente al análisis de la demanda y de la oferta de un cierto bien, o de varios bienes, el investigador se propone dos fines:

1.° Estimar el valor numérico de los parámetros que luego podemos interpretar a la luz de la Teoría Económica (conociendo, por ejemplo, la elasticidad de la demanda de cierto bien respecto a la renta, se pueden clasificar tales bienes según su elasticidad y comprobar cómo la teoría se comporta respecto a la experiencia).

2.° Formular previsiones respecto al valor que la variable que examinamos puede tomar en el futuro, por el cambio observado en el período de observación y aquel en el cual se realiza la previsión.

Que este segundo fin ejerce mayor atractivo que el primero, no ofrece duda. Pero desgraciadamente el actual instrumento matemático-estadístico a disposición de los estudiosos no permite formular previsiones suficientemente aproximadas, cuando en la mutación intervienen condiciones iniciales numerosas y no estamos en condiciones de estimar el nuevo valor que ha tomado la variable, que ha cambiado súbitamente.

En vista de esta dificultad, de orden matemático-estadístico, que el estudioso encuentra en una consideración sistemática del problema de la formulación de previsiones en economía —problema este último conexo con el de la verificación del modelo—, hemos preferido analizar el curso de la demanda y de la oferta del bien por nosotros considerado —bienes alimenticios—, dejando de hacer previsiones. En otros términos, nos hemos planteado el siguiente problema: admitiendo que la demanda y la oferta de los bienes alimenticios en Italia están influenciados por un cierto número de variables, ¿en qué medida la variación de las variables influye en la variación en el consumo y en la producción de los bienes alimenticios?

Por lo que se refiere a la longitud de las series temporales, indicaremos que no es posible extenderse a otros períodos de tiempo del aquí considerado, por las siguientes razones:

a) La escasa atención que se prestó a la estimación de la Renta Nacional con anterioridad a 1928.

b) La necesidad de excluir el período de guerra (a causa del control y del racionamiento impuesto por la misma) y el postbélico (por las condiciones anormales del mercado: inflación, etc.).

ANALISIS DE LAS VARIABLES CONTENIDAS EN EL MODELO

Como habíamos dicho en la primera lección, el primer problema que hay que afrontar en un estudio econométrico, y por añadidura en una investigación relativa a la demanda y a la oferta de un bien, es la relación de variables que hay que incluir en la ecuación. Generalmente, los factores más importantes que influyen en la demanda y la oferta de un bien son: su precio, el precio de los otros bienes y servicios, la renta a disposición de los consumidores y el coste de producción. Naturalmente, el número limitado de variables económicas incluídas en un sistema de ecuaciones; la falta de precisión con que se miden los valores de las variables; además de los errores que cometemos cuando una variable se sustituye por otra afín, porque de la primera no es posible disponer de observaciones empíricas; no puede darnos más que un sistema aproximado del desenvolvimiento efectivo del fenómeno que se examina.

Por lo que respecta a la forma de las relaciones, se escogió la lineal, que pensamos es suficiente, ya que la mayor parte de las relaciones precio-cantidad se mueven en un campo de variaciones relativamente estrecho.

Dicho esto examinemos los datos estadísticos relativos a las variables en que se apoya nuestro modelo:

a) *Consumo per-cápita* (Y_1).

No disponiendo de datos estadísticos referentes a la provisión anual y al empleo de productos alimenticios para uso industrial, nos hemos visto obligados a adoptar, para la variable que examinamos, la serie de datos relativos a la disponibilidad por cabeza. En la tabla de la página siguiente están contenidas la disponibilidades de géneros alimenticios expresados en cantidad y valor (obtenido este último multiplicando las cantidades de los diferentes bienes por su respectivo precio de venta en 1928). Por otra parte, dividiendo las diversas disponibilidades anuales expresadas en su valor por el de 1928, hemos podido expresar la disponibilidad anual de géneros alimenticios (para nosotros el consumo nacional per-capita) bajo la forma de números índices.

b) *Precio de venta* (Y_2).

La correspondiente serie de números índices de precios de venta de géneros alimenticios, como resulta de la tabla número 2, se ha obtenido deflacionando los números índices de los precios al por menor por el correspondiente al costo de la vida. Esta operación ha sido realizada con objeto de eliminar el diverso poder adquisitivo de la moneda en el tiempo.

TABLA NUM. 1

Disponibilidad por habitante de los principales géneros alimenticios

GENERO		1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	PRECIO
Trigo blando	Kg.	141,5	142,1	134,—	128,9	127,9	135,1	122,1	120,—	131,7	129,1	131,8	1,35
Trigo duro	"	39,9	42,2	39,4	36,—	34,4	35,8	34,1	31,2	30,6	36,3	43,1	1,42
		28,8	25,1	32,6	36,1	27,2	31,8	27,4	31,8	25,3	37,7	35,—	1,13
Arroz	"	10,7	10,4	10,3	10,8	11,—	10,5	11,5	12,1	12,5	11,8	12,6	1,07
Patatas	"	26,7	35,—	32,—	31,2	49,4	42,4	41,6	29,9	23,1	43,7	38,1	0,90
Guisantes secos	"	4,5	3,9	4,7	4,8	5,4	5,1	4,8	4,9	4,2	4,4	4,2	2,38
Verduras	"	65,5	71,8	67,4	62,—	67,6	64,9	59,5	57,8	58,—	65,3	77,2	1,76
Frutas	"	60,4	58,7	53,9	55,7	60,4	62,9	50,3	51,2	42,6	45,3	42,3	4,18
Azúcar	"	8,7	8,6	8,2	7,8	7,1	6,8	6,8	7,—	6,9	7,7	8,—	6,92
Vino	ltr.	98,3	126,3	111,2	95,—	96,3	112,2	80,2	76,4	105,1	73,9	81,1	1,72
Café	Kg.	1,2	1,2	1,1	1,1	1,—	0,9	0,9	0,9	0,7	0,9	0,8	29,39
Carne bovina	"	12,1	11,4	9,1	9,3	9,7	9,8	9,4	9,4	8,9	8,4	8,6	8,16
Carne caballo	"	5,1	5,2	5,9	6.—	4,5	4,7	4,9	5,6	5,5	5,—	5,4	10,80
Pescado fresco	"	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	4,—	4,1	4,3	4,3	9,50
Bacalao	"	1,3	1,4	1,—	1,2	1,1	1,2	1,3	1,—	0,6	1,2	1,4	4,49
Uva	n.	4,6	6,7	8,—	5,4	8,4	6,7	8,2	6,3	7,5	8,5	7,2	0,60
Leche	*ltr.*	33,6	33,6	33,7	39,9	34,1	34,2	34,3	34,—	32,5	34,6	37,4	1,42
Queso	Kg.	4,6	4,7	4,7	4,6	4,9	5,—	5,—	5,1	4,6	5,2	5,4	18,46
Aceite	ltr.	7,3	8,9	8,4	4,9	7,—	6,4	6,1	6,5	6,—	6,2	8,5	9,14
Tocino	Kg.	3,7	3,7	4,—	4,3	3,3	3,4	3,5	4,—	3.8	3,3	3,7	8,90
Manteca	"	1,1	1,—	1,—	1,1	1,1	1,1	1,1	1,2	1,—	1,3	1,3	17,56
Valores	L.	1.403	1.473	1.393	1.327	1.360	1.399	1.255	1.258	1.248	1.270	1.333	
Números índices		100	104,9	99,2	94,5	96,9	99,6	89,4	89,6	88,9	90,5	95,1	

TABLA NUM. 2

AÑOS	Números índices de precios al por menor (1)	Números índices del costo de la vida (2)	Números índices de precios al por menor deflacionados $(3) = \frac{(1)}{(2)}$
1928	100,—	100,—	100,—
29	105,4	101,6	103,7
30	96,9	98,4	98,5
31	83,1	88,9	93,5
32	79,7	85,—	93,8
33	75,5	81,4	92,7
34	71,—	77,2	92,—
35	73,4	78,3	93,7
36	80,9	84,2	96,1
37	90,4	92,2	98,—
38	94,6	99,3	95,3

c) *Renta real per-cápita* (Z_1).

Dividiendo el importe anual de la renta real nacional por la población, habíamos obtenido la renta per-capita. No ha sido necesario deflacionar los datos, ya que el importe de la renta nacional se ha expresado en liras en 1938. Llevando las diferentes rentas reales por cabeza anuales a 1928, hemos construído la serie de números índices, como figuran en la tabla núm. 3.

TABLA NUM. 3

AÑOS	Renta en miles de liras 1938 (1)	Población en 000 (2)	Renta per-cápita $(3) = \frac{(1)}{(2)}$	Números índices de renta real per-capita (1928 = 100) (4)
1928	103,5	40,392	2.560	100,—
29	100,7	40.706	2.470	96,5
30	87,1	41.069	2.120	82,8
31	84,4	41.439	2.040	79,7
32	89,2	41.755	2.140	83,6
33	84,9	42.101	2.020	78,9
34	89,6	42.453	2.110	82,4
35	102,6	42.809	2.400	93,7
36	96,1	43.151	2.230	87,1
37	111,—	54.504	2.550	99,6
38	106,6	43.979	2.420	94,5

d) *Coste de producción* (Z_2).

Como resulta evidente de los datos contenidos en la tabla siguiente, la serie deflacionada de los números índices del coste de la producción de los agricultores, se ha obtenido dividiendo los números índices de los precios de los bienes y servicios adquiridos por los agricultores (1) por los números índices del costo de vida.

TABLA NUM. 4

AÑOS	Números índices del costo de producción (1)	Números índices del costo de la vida (2)	Números índices deflacionados $(3) = \frac{(1)}{(2)}$
1928	100,—	100,—	100,—
29	99,2	101,6	97,6
30	93,1	98,4	94,6
31	82,7	88,9	93,—
32	77,7	85,—	91,4
33	73,7	81,4	90,5
34	71,6	77,2	92,7
35	73,8	78,3	94,2
36	79,9	84,2	94,9
37	89,5	92,2	97,1
38	96,5	99,3	97,2

e) *Variable "tiempo"* (Z_3).

Esta considera el efecto de las variables no incluídas en las ecuaciones y que influyen de *modo sistemático* en la demanda y la oferta de los géneros alimenticios. Así, por ejemplo: Los cambios en el gusto, en los hábitos; los cambios tecnológicos en el proceso productivo; los cambios en la población rural, etc. Hemos supuesto que la tendencia es uniforme y, por tanto, representable por una función lineal. Indicaremos que en los años 1928, 1929, 1930, etc., la variable tiempo tomará los valores 1, 2, 3, 4, etc., habiendo tomado como base el año 1928.

f) *Variable aleatoria* (ε_1, ε_2).

Su significado, como se recordará de cuanto habíamos expuesto en las lecciones precedentes, es el de representar el efecto conjunto de las variables no incluídas en el modelo y que *no tienen* *carácter sistemático,* pero que influyen en la demanda y la oferta de los bienes alimenticios. Respecto a las variables aleatorias, suponemos que se distribuyen, normalmente, con media cero.

Para mayor facilidad exponemos en la siguiente tabla resumida (núm. 5) los valores —expresados en números índices— tomados, en el tiempo, por nuestras variables:

TABLA NUM. 5

AÑOS	Consumo per cápita (Y_1)	Precio de venta (Y_2)	Renta real per-capita (Z_1)	Coste de producción (Z_2)	Tiempo (Z_3)
1928	100,—	100,—	100,—	100,—	1
29	104,9	103,7	96,5	97,6	2
30	99,2	98,5	82,8	94,6	3
31	94,5	93,5	79,7	93,—	4
32	96,9	93,8	83,6	91,4	5
33	99,6	92,7	78,9	90,5	6
34	89,4	92,—	82,4	92,7	7
35	89,6	93,7	93,7	94,2	8
36	88,9	96,1	87,1	94,9	9
37	90,5	98,—	99,6	97,1	10
38	95,1	95,3	94,5	97,2	11

EL MODELO, SU IDENTIFICACION Y ESTIMACION DE LOS PARAMETROS

Por cuanto se ha dicho anteriormente, nuestro modelo estará compuesto por las ecuaciones siguientes:

$$b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + c_{11} z_1 + c_{13} z_3 = \varepsilon_1$$

(ecuación de la demanda, que depende del consumo, del precio de venta, de la renta del tiempo y de la variable casual.)

[1]

$$b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + c_{22} z_2 + c_{23} z_3 = \varepsilon_2$$

(ecuación de la oferta, que depende del consumo, del precio de venta, del coste de producción, del tiempo y de la variable casual.)

Recordemos que los subíndices puestos a los parámetros (los coeficientes b_i son los de las variables endógenas, mientras que los c_j lo son a las exógenas) señalan, respectivamente, el número de orden de la línea (o ecuación) y el número de orden de la variable.

Por tanto, b_{11} significa que es el parámetro colocado en la primera ecuación (demanda de bienes alimenticios) y relativo a la variable y_1 (consumo por cabeza), y así todos. Cuando consideramos las variables incluídas en el modelo, vemos que se han expresado por letras minúsculas, ya que, como veremos en seguida, indican desviaciones de los valores originales (expresados en números índice) a la respectiva media aritmética. Por último, hemos clasificado como endógenas las variables: y_1 é y_2 (consumo per-capita y precio de venta); como exógenas: z_1, z_2, z_3 (o sea, la renta real per-cápita, los costos de producción y la variable tiempo).

Naturalmente que nuestro modelo está muy simplificado y reproduce sólo en parte los verdaderos hechos que han influído sobre la demanda y oferta de los bienes alimenticios en el período de tiempo considerado.

Quizá alguien se maraville al ver incluídas entre las variables exógenas la renta real por cabeza y los costes de producción. Para justificarlo, observemos que la inclusión de la variable z_1 entre las exógenas es debido, principalmente, a la falta de datos relativos a las investigaciones efectuadas anualmente, ya que en otro caso habría que suponer que la renta de un determinado período depende de la del período precedente y de la nueva inversión. Por otra parte, deseamos añadir que el no haber incluído entre las variables endógenas la renta real por cabeza no deberá perjudicar la bondad del modelo, puesto que sabemos ya que influye de modo despreciable en las variables endógenas que han aparecido en la ecuación de la demanda.

Por otro lado, respecto a la variable z_2 (coste de producción), ha sido considerada como exógena, por no disponer de las observaciones empíricas necesarias para la formación de una nueva ecuación, que expresase la dependencia de los costes de producción de las otras variables.

Después de estas aclaraciones, el primer problema que debemos afrontar es la identificación de las ecuaciones que componen nuestro modelo; es decir, si se trata de un sistema identificable. La respuesta será afirmativa si el modelo satisface la condición necesaria y la necesaria y suficiente.

Considerando nuestro sistema se ve que la ecuación de la oferta contiene la variable z_2, que no se encuentra en la de la demanda, mientras que en esta última ecuación figura la variable z_1, que no aparece en la primera ecuación. Por lo tanto, la condición necesaria, según la cual el número de las variables excluído de cada ecuación debe ser, al menos, igual al número de las ecuaciones (o de las variables endógenas) menos una, se satisface. Por lo tanto, cumple la condición necesaria.

Por cuanto hace a la condición necesaria y suficiente, ésta se satisfará si, como se dijo anteriormente, podemos sacar de la matriz formada por los parámetros de las variables no contenidos en la ecuación que se considera, pero sí en el sistema, un determinante no nulo de primer orden. Ahora bien, puesto que todo parámetro (*coeficiente*) contenido en el sistema es diferente de cero, resulta que la ecuación de la demanda y de la oferta de alimentos son identificables, ya que los parámetros c_{22} y c_{21} no son nulos.

En este punto, para escoger el procedimiento estadístico de estimación más apropiado, debemos considerar el tipo de identificación que responda a las dos realizaciones del modelo; recordando que una ecuación estructural es exactamente identificable si el número de las variables exógenas contenidas en el sistema, pero no en la ecuación, resulta inferior en uno al de aquellas variables endógenas que figuran en la ecuación que se considera. Puesto que, tanto en la ecuación de la demanda como en la de la oferta de bienes alimenticios aparecen dos variables endógenas (y_1, y_2) y una sola variable exógena (respectivamente, z_2 y z_1), se deduce que dichas relaciones económicas son exactamente identificables. Por tanto, basándonos en cuanto habíamos dicho anteriormente, es posible aplicar el método de los mínimos cuadrados, como procedimiento estadístico para estimar los parámetros estructurales.

Antes de aplicar el método de los mínimos cuadrados, debemos efectuar algunas operaciones preliminares; y precisamente:

1) Determinar las desviaciones de los valores originales a la respectiva media aritmética.

2) Completar algunos cálculos sobre tales desviaciones.

TABLA NUM. 6

AÑOS	Consumo per-cápita (Y_1)	Precio de venta (Y_2)	Renta real per-cápita (Z_1)	Coste de producción (Z_2)	Tiempo (Z_3)
1928	100,—	100,—	100,—	100,—	1
29	104,9	103,7	96,5	97,6	2
30	99,2	98,5	82,8	94,6	3
31	94,5	93,5	79,7	93,—	4
32	96,9	93,8	83,6	91,4	5
33	99,6	92,7	78,9	90,5	6
34	89,4	92,—	82,4	92,7	7
35	89,6	93,7	93,7	94,2	8
36	88,9	96,1	87,1	94,9	9
37	90,5	98,—	99,6	97,1	10
38	95,1	95,3	94,5	97,2	11
Media aritmética	95,33	96,11	88,98	94,83	6

Sustituyendo los valores de los números índices de cada variable por sus diferencias a sus respectivas medias aritméticas, obtendremos una nueva serie de datos, contenidos en la siguiente tabla:

Tabla de las desviaciones

AÑO	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3
1928	4,67	3,89	11,02	5,17	—5
29	9,57	7,58	7,52	2,77	—4
30	3,88	2,38	— 6,18	— 0,24	—3
31	— 0,83	— 2,62	— 9,28	— 1,84	—2
32	1,58	— 2,32	— 5,38	— 3,44	—1
33	4,28	— 3,42	— 10,08	— 4,34	0
34	— 5,93	— 4,12	— 6,58	— 2,14	1
35	— 5,73	— 2,42	4,72	— 0,64	2
36	— 6,43	— 0,01	— 1,88	0,07	3
37	— 4,83	1,88	10,61	2,27	4
38	— 0,23	— 0,82	5,51	2,36	5

Después de haber determinado los cuadros de las desviaciones de nuestras variables y los productos de las desviaciones —cuyos valores están contenidos en la tabla núm. 6 de la página siguiente—, construímos la matriz de las covarianzas, que tiene la propiedad de ser simétrica. En ella se dan los resultados de la suma de los valores que aparecen en la página siguiente:

Matriz de las desviaciones

	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3
y_1	282,676	113,282	27,059	31,639	— 130,340
y_2		129,231	187,568	80,880	— 54,920
z_1			644,890	206,632	24,510
z_2				84,233	— 11,420
z_3					110,000

Terminadas las operaciones preliminares, volvamos a nuestro modelo:

$$\begin{aligned} b_{11}\, y_1 + b_{12}\, y_2 + c_{11}\, z_1 + c_{13}\, z_3 &= \varepsilon_1 \quad \text{(ecuación de demanda)} \\ b_{21}\, y_1 + b_{22}\, y_2 + c_{22}\, z_2 + c_{23}\, z_3 &= \varepsilon_2 \quad \text{(ecuación de oferta)} \end{aligned} \qquad [1]$$

y expresémoslo en forma reducida, en una forma en cuyo primer miembro aparezcan sólo las variables endógenas:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11}\, z_1 + A_{12}\, z_2 + A_{13}\, z_3 \\ y_2 &= A_{21}\, z_1 + A_{22}\, z_2 + A_{23}\, z_3 \end{aligned} \qquad [2]$$

y en la cual los nuevos parámetros A_i se han obtenido dividiendo los estructurales por b_{11} (ecuación de la demanda) y b_{22} (ecuación de la oferta). En cuanto a la variable casual no aparece en la forma reducida, por cuanto se ha supuesto que su media es igual a cero.

Para estimar el parámetro A_i contenido en el modelo reducido, adoptaremos la fórmula expuesta anteriormente y señalada con [4b]:

$$\sum_{r=1}^{k} A_{sr} H_{ri} = F_{si}$$

$(s = 1, 2;$ es decir, el número de nuestras variables endógenas: y_1 é y_2).

$(i = 1, 2, 3;$ o sea, el número de las variables exógenas: z_1, z_2, z_3).

en donde A_{sr} son los parámetros que hay que estimar (es decir, la incógnita).

$$H_{ri} = \sum_{t=1}^{N} z_r(t)\, z_i(t)$$

(o sea, la suma de los productos de los valores tomados por las tres variables exógenas).

$$F_{si} = \sum_{t=1}^{N} y_s(t)\, z_i(t)$$

(equivalente a decir, la suma de los productos de los valores de las variables endógenas y exógenas).

Por tanto, para la ecuación de la demanda, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} A_{11}\Sigma z^2_1 + A_{12}\Sigma z_1 z_2 + A_{13}\Sigma z_1 z_3 &= \Sigma y_1 z_1 \\ A_{11}\Sigma z_2 z_1 + A_{12}\Sigma z^2_2 + A_{13}\Sigma z_2 z_3 &= \Sigma y_1 z_2 \\ A_{11}\Sigma z_1 z_3 + A_{12}\Sigma z_2 z_3 + A_{13}\Sigma z^2_3 &= \Sigma y_1 z_3 \end{aligned}\right\} \quad [3]$$

y para la ecuación de la oferta:

$$\left.\begin{aligned} A_{21}\Sigma z^2_1 + A_{22}\Sigma z_1 z_2 + A_{23}\Sigma z_1 z_3 &= \Sigma y_2 z_1 \\ A_{21}\Sigma z_1 z_2 + A_{22}\Sigma z^2_2 + A_{23}\Sigma z_2 z_3 &= \Sigma y_2 z_2 \\ A_{21}\Sigma z_1 z_3 + A_{22}\Sigma z_2 z_3 + A_{23}\Sigma z^2_3 &= \Sigma y_2 z_3 . \end{aligned}\right\} \quad [4]$$

Sustituyendo los valores del sumatorio por los contenidos en la matriz de la varianza, la [3] y la [4] quedan así:

$$\left.\begin{aligned} 644{,}890\, A_{11} + 206{,}632\, A_{12} + 24{,}510\, A_{13} &= 27{,}059 \\ 206{,}632\, A_{11} + 84{,}233\, A_{12} - 11{,}420\, A_{13} &= 31{,}639 \\ 24{,}510\, A_{11} - 11{,}420\, A_{12} + 110{,}000\, A_{13} &= -130{,}340 \end{aligned}\right\} \quad [3a]$$

$$\left.\begin{aligned} 644{,}890\, A_{21} + 206{,}632\, A_{22} + 24{,}510\, A_{23} &= 187{,}568 \\ 206{,}632\, A_{21} + 84{,}233\, A_{22} - 11{,}420\, A_{23} &= 80{,}880 \\ 24{,}510\, A_{21} - 11{,}420\, A_{22} + 110{,}000\, A_{23} &= 54{,}920 \end{aligned}\right\} \quad [4a]$$

Aplicando la regla de Cramer, obtendremos:

$$A_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 27{,}059 & 206{,}632 & 24{,}510 \\ 31{,}639 & 84{,}233 & -11{,}420 \\ -130{,}340 & -11{,}420 & 110{,}000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 644{,}890 & 206{,}632 & 24{,}510 \\ 206{,}632 & 84{,}233 & -11{,}420 \\ 24{,}510 & -11{,}420 & 110{,}000 \end{vmatrix}} =$$

$$A_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 644{,}890 & 27{,}059 & 24{,}510 \\ 206{,}632 & 31{,}639 & -11{,}420 \\ 24{,}510 & -130{,}340 & 110{,}000 \end{vmatrix}}{W}$$

$$A_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 644{,}890 & 206{,}632 & 27{,}059 \\ 206{,}632 & 84{,}233 & 31{,}639 \\ 24{,}510 & -11{,}420 & -130{,}340 \end{vmatrix}}{W}$$

$$A_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 187{,}568 & 206{,}632 & 24{,}510 \\ 80{,}880 & 84{,}233 & -11{,}420 \\ -54{,}920 & -11{,}420 & 110{,}000 \end{vmatrix}}{W}$$

$$A_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 644{,}890 & 187{,}568 & 24{,}510 \\ 206{,}632 & 80{,}880 & -11{,}420 \\ 24{,}510 & -11{,}420 & 110{,}000 \end{vmatrix}}{W}$$

$$A_{23} = \frac{\begin{vmatrix} 644{,}890 & 206{,}632 & 187{,}568 \\ 206{,}632 & 84{,}233 & 80{,}880 \\ 24{,}510 & -11{,}420 & -54{,}920 \end{vmatrix}}{W}$$

Resolviendo los diferentes determinantes con la regla de Sarrus, obtenemos los valores de los parámetros A_i, que son, precisamente:

$$A_{11} = 0{,}0932 \qquad A_{21} = 0{,}0928$$

$$A_{12} = -0{,}0168 \qquad A_{22} = 0{,}6714$$

$$A_{13} = -1{,}2074 \qquad A_{23} = -0{,}4502$$

Una vez calculados, sustituímos en el modelo de forma reducida

$$\left.\begin{aligned} y &= A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + A_{13} z_3 \\ y &= A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + A_{23} z_3 \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

los valores de los parámetros por los valores estimados, y obtendremos:

$$y_1 = 0{,}0932\, z_1 - 0{,}0168\, z_2 - 1{,}2074\, z_3$$

$$y_2 = 0{,}0928\, z_1 + 0{,}6714\, z_2 - 0{,}4502\, z_3 .$$

Sin embargo, los valores de los parámetros obtenidos precedentemente con la aplicación del método de los mínimos cuadrados son los de la forma reducida y no a la estructural, en la cual hemos expuesto el modelo original. Por tanto, deberemos determinar los parámetros de la forma estructural, dados los de la forma reducida. En esto vamos a seguir el procedimiento expuesto en páginas anteriores.

Sustituyendo en la [1] y_1 e y_2 por los valores deducidos de la [2], y haciendo cero el segundo miembro —ya que, como habíamos supuesto, el valor medio de las variables casuales es igual a cero—, obtenemos:

$$b_{11} (A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + A_{13} z_3) + b_{12} (A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + A_{23} z_3) + \\ + c_{11} z_1 + c_{13} z_3 = 0$$

$$b_{21} (A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + A_{13} z_3) + b_{12} (A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + A_{23} z_3) + \\ + c_{22} z_2 + c_{23} z_3 = 0 .$$

esto es:

$$b_{11} A_{11} z_1 + b_{11} A_{12} z_2 + b_{11} A_{13} z_3 + b_{12} A_{21} z_1 + b_{12} A_{22} z_2 + \\ + b_{12} A_{23} z_3 + c_{11} z_1 + c_{13} z_3 = 0$$

$$b_{21} A_{11} z_1 + b_{21} A_{12} z_2 + b_{21} A_{13} z_3 + b_{22} A_{21} z_1 + b_{22} A_{22} z_2 + \\ + b_{22} A_{23} z_3 + c_{22} z_2 + c_{23} z_3 = 0$$

y sacando factor común a las variables exógenas (z_i), tendremos:

$$z_1 (b_{11} A_{11} + b_{12} A_{21} + c_{11}) + z_2 (b_{11} A_{12} + b_{12} A_{22}) + \\ + z_3 (b_{11} A_{13} + b_{12} A_{23} + c_{13}) = 0$$

$$z_1 (b_{21} A_{11} + b_{22} A_{21}) + z_2 (b_{21} A_{12} + b_{22} A_{22} + c_{22}) + \\ + z_3 (b_{21} A_{13} + b_{22} A_{23} + c_{23}) = 0 .$$

Como dos ecuaciones se han igualado a cero, es evidente que los coeficientes de las z_i deberán ser nulos; o sea:

$$\left.\begin{array}{l} b_{11} A_{11} + b_{12} A_{21} + c_{11} = 0 \\ b_{11} A_{12} + b_{12} A_{22} = 0 \\ b_{11} A_{13} + b_{13} A_{23} + c_{13} = 0 \\ b_{21} A_{11} + b_{22} A_{21} = 0 \\ b_{21} A_{12} + b_{22} A_{22} + c_{22} = 0 \\ b_{21} A_{13} + b_{22} A_{23} + c_{23} = 0 . \end{array}\right\} \qquad [2a]$$

Teniendo en cuenta cuanto habíamos expuesto anteriormente, podemos poner $b_{11} = -1$ y $b_{21} = -1$. De este modo la [2a] tomará la forma:

$$b_{12} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$$

$$b_{22} = \frac{A_{11}}{A_{21}}$$

[2b]

$$\begin{aligned} c_{11} &= A_{11} - b_{12} A_{21} \\ c_{13} &= A_{13} - b_{12} A_{23} \\ c_{22} &= A_{12} - b_{22} A_{22} \\ c_{23} &= A_{13} - b_{22} A_{23} . \end{aligned} \qquad [2b]$$

Sustituyendo en la [2b] los valores de las diferentes A_{ij}, y recordando que $b_{11} = -1$; $b_{21} = -1$, obtendremos los valores de los parámetros de la forma estructural, o sea:

$$b_{11} = -1$$

$$b_{21} = -1$$

$$b_{12} = \frac{-0{,}0168}{0{,}6714} = -0{,}0250$$

$$b_{22} = \frac{0{,}0932}{0{,}0928} = 1{,}0043$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0{,}0932 + 0{,}0250 \,.\, 0{,}0928 = 0{,}0955 \\ c_{13} &= -1{,}2074 + 0{,}0250 \,.\, 0{,}4502 = -1{,}2198 \\ c_{22} &= -0{,}0168 - 1{,}0043 \,.\, 0{,}6714 = -0{,}6911 \\ c_{23} &= -1{,}2074 + 1{,}0043 \,.\, 0{,}4502 = -0{,}7553 . \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación estructural (es decir, el modelo original), fórmula [1], tomará la forma:

$$y_1 = -0{,}025 \; y_2 + 0{,}0955 \, z_1 - 1{,}2198 \, z_3 \qquad [5]$$

$$y_1 = 1{,}0043 \, y_2 - 0{,}6911 \, z_2 - 0{,}7553 \, z_3 . \qquad [6]$$

Sustituímos ahora, en la [5] y [6], a las variables y_2, z_1, z_2, z_3 por los valores expresados en forma de varianzas y contenidos en la correspondiente tabla expuesta. Obtenemos dos nuevas cantidades, que llamaremos y'_1 (demanda) e y''_1 (oferta), cuyos valores anuales damos a continuación:

	y'_1	y''_1
1928	7,055	4,111
29	5,409	8,720
30	3,011	4,822
31	1,619	0,152
32	0,764	0,802
33	— 0,878	— 0,436
34	— 1,745	— 3,414
35	— 1,928	— 3,499
36	— 3,839	— 2,324
37	— 3,914	— 2,702
38	— 5,554	— 6,232

Por otra parte, sustituyendo los valores por los relativos a las y (consultar siempre la tabla de desviaciones dada), obtenemos los valores de las diferencias, o sea, de las variables casuales ε_1 y ε_2:

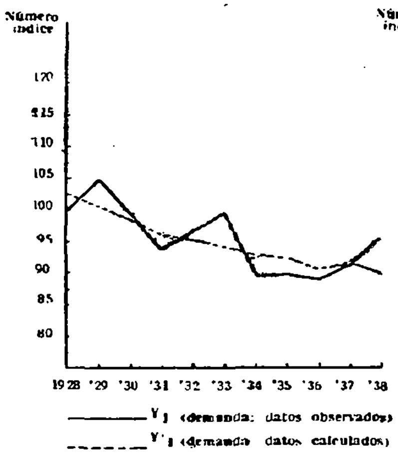
	ε_1	ε_2
1928	— 2,38	— 0,56
29	4,26	— 0,85
30	0,87	0,94
31	— 2,45	0,98
32	0,82	— 0,78
33	5,16	— 4,72
34	— 4,18	2,52
35	— 3,80	2,23
36	— 2,59	4,11
37	— 0,92	2,13
38	5,31	— 6,00

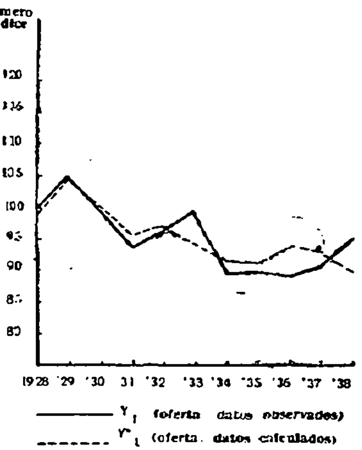
En fin, si se vuelve a las desviaciones de los valores, esto es, si se suman algebraicamente los residuos a los valores tomados por la variable y (expresada en números índices y contenida en la tabla número 5 tendremos:

	y'_1	y''_1
1928	102,38	99,44
29	100,64	104,05
30	98,43	100,15
31	96,95	95,48
32	96,08	96,13
33	94,44	94,89
34	93,58	91,82
35	93,40	91,83
36	91,49	93,01
37	91,42	92,63
38	89,78	89,10

Esta es la serie de datos obtenidos de las elaboraciones y relativos a la demanda y a la oferta de los géneros alimenticios en nuestro país, en el período de tiempo 1928-1938.

En los dos diagramas dibujados en esta página hemos enfrentado los valores observados de la demanda y de la oferta de los bienes considerados (Y_1) y los calculados (Y'_1; Y''_1).





Si deseamos introducir en las ecuaciones estructurales los valores en lugar de las desviaciones, debemos poner:

$$Y_1 - 95{,}33 = -0{,}025 \ (Y_2 - 96{,}11) + 0{,}0955 \, (Z_1 - 89{,}98) - \\ - 1{,}6819 \, (Z_3 - 6{,}00)$$

$$Y_1 - 95{,}33 = \quad 1{,}0043 \, (Y_2 - 96{,}11) - 0{,}6911 \, (Z_2 - 94{,}83) - \\ - 0{,}7553 \, (Z_3 - 6{,}00)$$

obtenemos:

$$Y_1 = -0{,}025 \ Y_2 + 0{,}955 \ Z_1 - 1{,}2198 \, Z_3 + 96{,}554$$
$$Y_1 = \quad 1{,}0043 \, Y_2 - 0{,}6911 \, Z_2 - 0{,}7553 \, Z_3 + 68{,}876 \, .$$

Ahora podemos calcular la elasticidad, tomando para cada variable su valor medio (Y y Z):

Demanda:

Elasticidad respecto al precio de venta. $\frac{d y_1}{d y_2} \frac{Y_2}{Y_1} = -0{,}025 \frac{96{,}11}{95{,}33} = -0{,}0252$

Elasticidad respecto a la renta. $\frac{6 d y_1}{d z_1} \frac{Z_1}{Y_1} = 0{,}0955 \frac{88{,}98}{95{,}33} = 0{,}0891$

Oferta:

Elasticidad respecto al precio de venta. $\frac{d y_1}{d y_2} \frac{Y_2}{Y_1} = 1{,}0043 \frac{96{,}11}{95{,}33} = 1{,}0125$

Elasticidad respecto al coste de venta. $\frac{d y_1}{d z_2} \frac{Z_2}{Y_1} = -0{,}6911 \frac{94{,}83}{95{,}33} = -0{,}6451$

CONCLUSIONES

Llegando al término de nuestra investigación sobre la demanda y la oferta de los bienes alimenticios en Italia de 1928 a 1938, podemos sintetizar, en los siguientes puntos, las conclusiones de los resultados obtenidos:

1) Los signos que preceden a los valores de la elasticidad calculada, concuerdan con aquellos "esperados" por la teoría económica.

2) Es verosímil que en el período considerado, y por término medio:

a) *Respecto a la demanda.*—Para un aumento del 1 por 100 en los precios de los bienes alimenticios, habrá una disminución en la demanda de estos bienes de cerca del 0,03 por 100. Por otro lado, por una disminución del 1 por 100 en la renta real por cabeza, la demanda se contraería en cerca del 0,09 por 100.

b) *Respecto a la oferta.*—Una disminución en el precio de los bienes sujetos a consideración del 1 por 100 provocaría una contracción en la cantidad ofrecida en la misma proporción. En fin, por un aumento del 1 por 100 en los costes de producción, la cantidad ofrecida de géneros alimenticios disminuye en cerca del 0,7 por 100.

3) Los signos negativos que preceden a los valores numéricos, de la variable "tiempo" (Z_3), denotan una tendencia decreciente por parte de los consumidores y de los productores en los mercados de los géneros alimenticios.

4) En fin, por cuanto consideramos los dos diagramas expuestos en la página 423, debemos revelar que la marcha de los datos calculados y referentes a la oferta (Y''_1) son adecuados a los valores observados de las Y_1 mejor que a la marcha de los datos calculados y relativos a la demanda (Y'_1). La menor adherencia de los valores calculados Y'_1 reside, principalmente, en el hecho de que la serie de datos se obtuvo atendiendo a la disponibilidad por cabeza, en lugar del consumo individual.

LECCION IX

EXAMEN DE LA DEMANDA Y DE LA OFERTA DE LOS BIENES ALIMENTICIOS EN ITALIA DE 1928 A 1938, MEDIANTE UN MODELO ECONOMETRICO (con aplicación del método de la máxima verosimilitud con información limitada)

Después del examen realizado en la lección precedente a propósito de la aplicación del método de los mínimos cuadrados, para estimar los parámetros contenidos en el modelo construído para el análisis de la demanda y de la oferta de bienes alimenticios en Italia de 1928 a 1938, debemos ahora ver cómo tales parámetros pueden estimarse con el segundo procedimiento estadístico expuesto en la lección VII; es decir, con el método de la máxima verosimilitud con información limitada.

A este objeto volvamos a examinar el modelo precedente, pero introduciendo en la ecuación de la oferta una nueva variable exógena: los precios de venta en el año precedente, que consignamos con la letra Z_4. De este modo, suponemos que la oferta de los bienes alimenticios depende no sólo del consumo de los precios de venta, de los costes de producción, del tiempo y de la variable estocástica, sino además de los precios de venta, tomados por los bienes en consideración el año precedente.

Por tanto, nuestro modelo tomará la forma:

$b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + c_{11} z_1 + c_{13} z_3 = \varepsilon_1$	(ecuación de la demanda, que depende del consumo de los precios de venta de la renta, del tiempo y de la variable casual.)
$b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + c_{22} z_2 + + c_{23} z_3 + c_{24} z_4 = \varepsilon_2$	(ecuación de la oferta, que depende del consumo del precio de venta, de los costes de producción, del tiempo de los precios de venta en el año precedente y de la variable estocástica.)

Consideremos si el modelo, debido a la introducción de la nueva variable, es identificable.

De un examen de nuestro sistema se revela que en la ecuación de la oferta aparecen las variables z_2 y z_4, no contenidas en la demanda; mientras que en esta última ecuación figura la variable z_1, que no aparece en la ecuación de la oferta. Por tanto, la condición necesaria, según la cual la variable excluída de cada ecuación debe ser al menos igual al número de ecuaciones menos una, se satisface. Así es posible identificar el sistema.

Comprobemos ahora que nuestro modelo cumple la condición necesaria y suficiente; o sea, es posible extraer de la matriz formada por los parámetros de las variables no contenidas en la ecuación que se considera, pero sí en el sistema, al menos un determinante de primer orden, no nulo. Observemos la ecuación de la demanda y formemos su correspondiente matriz:

z_2	z_4
c_{22}	c_{24}

de la cual es posible extraer dos determinantes de primer grado, ambos no nulos, ya que los parámetros c_{22} y c_{24} son distintos de cero. Por tanto, la ecuación de la demanda de los bienes alimenticios es identificable. De lo dicho en la ecuación de oferta, como el parámetro c_{11} (elemento del determinante de primer orden, extraído de la matriz compuesta del coeficiente de la variable no contenida en la ecuación de la oferta; o sea, z_1), es diferente de cero. Deducimos que nuestro modelo es identificable.

Pero debemos observar que, a diferencia del modelo expuesto en la lección precedente, en éste la ecuación de la demanda es "más que" identificada, ya que el número de variables exógenas que no aparecen en ella (esto es, z_2 y z_4) resulta igual al de endógenas que están contenidas (o sea, y_1 é y_2). La ecuación de la oferta, en cambio, permanece "exactamente" identificada, puesto que el número de las variables exógenas excluídas es siempre igual al número de las endógenas menos una. Por tanto, en virtud de cuanto habíamos expuesto en la lección VII, la estimación de los parámetros estructurales de la primera ecuación *deberá* hacerse adaptando el método de la máxima verosimilitud con información limitada.

Damos los valores —expresados en números índices— tomados por la variable exógena Z_4 (precio de venta de los bienes alimenticios en el año precedente):

1928	103,2
29	100,—
30	103,7
31	98,5
32	93,5
33	93,8
34	92,7
35	92,—
36	93,7
37	96,1
38	98,—
Media aritmética:	96,84

y las respectivas desviaciones de la media aritmética:

1928	6,37
29	3,17
30	6,87
31	1,67
32	— 3,34
33	— 3,04
34	— 4,14
35	— 4,84
36	— 3,14
37	— 0,74
38	1,16

Las operaciones a realizar en las desviaciones, después de introducir la nueva variable (z_4), son las siguientes:

AÑOS	z_4^2	$y_1 z_4$	$y_2 z_4$	$z_1 z_4$	$z_2 z_4$	$z_3 z_4$
1928	40,577	29,748	24,779	70,197	32,933	— 31,85
29	10,049	30,337	24,029	23,838	8,781	— 12,68
30	47,197	26,652	16,351	— 42,457	— 1,649	— 20,61
31	2,789	— 1,386	— 4,375	— 15,498	— 3,073	— 3,34
32	11,156	— 5,277	7,749	— 17,269	11,490	3,34
33	9,242	— 13,011	10,397	30,643	13,194	0
34	17,140	24,550	17,057	27,241	8,860	4,14
35	23,426	27,733	11,713	— 22,845	3,098	— 9,68
36	9,860	20,190	0,031	5,903	— 0,220	— 9,42
37	0,548	3,574	— 1,391	7,851	— 1,680	— 2,96
38	1,346	— 0,267	— 0,951	6,392	2,738	5,80
	173,330	142,847	105,389	95,532	74,472	— 85,54

y la matriz completa de las desviaciones será:

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & y_1 & y_2 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\
y_1 & 282,676 & 113,282 & 27,059 & 31,639 & -130,340 & 142,847 \\
y_2 & & 129,231 & 187,568 & 80,880 & -54,920 & 105,389 \\
z_1 & & & 644,890 & 206,632 & 24,510 & 93,532 \\
z_2 & & & & 84,233 & -11,420 & 74,472 \\
z_3 & & & & & 110,000 & -85,540 \\
z_4 & & & & & & 173,330
\end{array}
$$

Para llegar a las operaciones de estimar los parámetros debemos, primeramente, conocer las cantidades que, en el método teórico de la máxima verosimilitud, con información limitada, se indican con E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}, J_{ij}, K_{ij}, L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}, P_{ij}, Q_{ij}. Con tal fin, hay que señalar que en nuestro caso las H variables endógenas de la ecuación de la demanda son y_1 e y_2, que las F variables exógenas u_i contenidas en la misma ecuación son z_1 y z_3, que z_2 y z_4 son las D variables exógenas v_r excluídas; escribamos, por ahora, las siguientes matrices:

Matriz E_{ij}

$$\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 282{,}676 & 113{,}282 \\ 113{,}282 & 129{,}231 \end{array} \right\| \end{array}$$

Matriz F_{ij}

$$\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 27{,}059 & -130{,}340 \\ 187{,}568 & -54{,}920 \end{array} \right\| \end{array}$$

Matriz G_{ij}

$$\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_4 & z_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 142{,}847 & 31{,}639 \\ 105{,}389 & 80{,}880 \end{array} \right\| \end{array}$$

Matriz H_{ij}

$$\begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 644{,}890 & 24{,}510 \\ 24{,}510 & 110{,}000 \end{array} \right\| \end{array}$$

El valor del determinante es $H = 70.337$; cuando la matriz recíproca de H_{ij} es:

Matriz H_{ij}

$$\begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_3 & z_1 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 0{,}001564 & -0{,}000348 \\ 0{,}000348 & 0{,}009169 \end{array} \right\| \end{array}$$

Matriz J_{ij}

$$\begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_3 \end{array} \begin{array}{cc} z_4 & z_2 \\ \left\| \begin{array}{cc} 93{,}532 & 206{,}632 \\ -85{,}540 & -11{,}420 \end{array} \right\| \end{array}$$

Matriz K_{ij}

$$\begin{array}{c} \\ z_4 \\ z_2 \end{array} \begin{array}{cc} z_4 & z_2 \\ \left\| \begin{array}{cc} 473{,}330 & 74{,}472 \\ 74{,}472 & 84{,}233 \end{array} \right\| \end{array}$$

En virtud de cuanto habíamos dicho anteriormente, debemos sustituir la variable v_i (es decir, las variables exógenas que no aparecen en la ecuación de la demanda: z_2 y z_4) por las variables s_i, ortogonales a las u_i. Por tanto, puesto que la expresión de la s_i es igual a

$$v_i - \sum_{r=1}^{F} \sum_{s=1}^{F} J_{ri} H^{rs} u_s ,$$

sustituímos v_i y u_s, respectivamente, por las variables exógenas que no aparecen (z_2 y z_4) y las que aparecen (z_1 y z_3) en la ecuación de demanda. Tendremos:

$$\begin{aligned} s_1 &= z_1 - J_{11} H^{11} z_1 - J_{21} H^{21} z_1 - J_{11} H^{12} z_3 - J_{21} H^{22} z_3 \\ s_2 &= z_2 - J_{12} H^{11} z_1 - J_{22} H^{21} z_1 - J_{12} H^{12} z_3 - J_{22} H^{22} z_3 . \end{aligned} \qquad [8]$$

Con esto las matrices G_{ij} y K_{ij} se sustituyen por las siguientes matrices L_{ij} y M_{ij}:

$$\begin{aligned} L_{11} = {} & G_{11} - F_{11} H^{11} J_{11} - F_{12} H^{21} J_{11} - F_{11} H^{12} J_{21} - \\ & - F_{12} H^{22} J_{21} = 142{,}847 - 27{,}059 \,.\, 0{,}001564 \,.\, 93{,}532 + \\ & + 130{,}340 \,(-0{,}000348) \,.\, 93{,}532 - 27{,}059 \,(- \\ & - 0{,}000348)\,(-85{,}540) + 130{,}340 \,. \\ & .\, 0{,}0009169 \,(-85{,}540) = 31{,}613 \end{aligned}$$

$$L_{12} = G_{12} - F_{11} H^{11} J_{12} - F_{12} H^{21} J_{12} - F_{11} H^{12} J^{22} - \\ - F_{12} H^{22} J_{22} = 31{,}639 - 27{,}059 \,.\, 0{,}001564 \,.\, 206{,}632 + \\ + 130{,}340 (- 0{,}000348) \,.\, 206{,}632 - 27{,}059 (- \\ - 0{,}000348) (- 11{,}420) + 130{,}340 \,. \\ .\, 0{,}009169 (- 11{,}420) = 0{,}234$$

$$L_{21} = G_{21} - F_{21} H^{11} J_{11} - F_{22} H^{21} J_{11} - F_{21} H^{12} J_{21} - \\ - F_{22} H^{22} J_{21} = 105{,}389 - 187{,}568 \,.\, 0{,}001564 \,.\, 93{,}532 + \\ + 54{,}920 (- 0{,}000348) \,.\, 93{,}532 - 187{,}568 (- \\ - 0{,}000348) (- 85{,}540) + 54{,}920 \,. \\ .\, 0{,}009169 (- 85{,}540) = 27{,}505$$

$$L_{12} = G_{22} - F_{21} H^{11} J_{12} - F_{22} H^{21} J_{12} - F_{21} H^{12} J_{22} - \\ - F_{22} H^{22} J_{22} = 80{,}880 - 187{,}568 \,.\, 0{,}001564 \,.\, 206{,}632 + \\ + 54{,}920 (- 0{,}000348)\ 206{,}632 - 187{,}568 (- \\ - 0{,}000348) (- 11{,}420) + 54{,}920 \,. \\ .\, 0{,}009169 (- 11{,}420) = 9{,}818$$

o sea:

$$\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} s_1 & \qquad s_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 31{,}613 & 0{,}234 \\ 27{,}505 & 9{,}818 \end{array} \right\| \end{array}$$

Matriz M_{ij}

$$M_{11} = K_{11} - J_{11} H^{11} J_{11} - J_{11} H^{12} J_{21} - J_{21} H^{21} J_{11} - \\ - J_{21} H^{22} J_{21} = 473{,}330 - 93{,}532 \,.\, 0{,}001564 \,.\, 93{,}532 - \\ - 93{,}532 (- 0{,}000348) (- 85{,}540) - 93{,}532 (- \\ - 0{,}000348) (- 85{,}540) - (- 85{,}540) \,. \\ .\, 0{,}009169 (- 85{,}540) = 86{,}990$$

$$M_{12} = K_{12} - J_{11} H^{11} J_{12} - J_{11} H^{12} J_{22} - J_{21} H^{21} J_{12} - \\ - J_{21} H^{22} J_{22} = 74{,}472 - 93{,}532 \,.\, 0{,}001564 \,.\, 206{,}632 - \\ - 93{,}532 (- 0{,}000348) (- 11{,}420) - (- 85{,}540) (- \\ - 0{,}000348) \,.\, 206{,}632 - (- 85{,}540) \,. \\ .\, 0{,}009169 (- 11{,}420) = 28{,}765$$

$$M_{21} = K_{21} - J_{12} H^{11} J_{11} - J_{12} H^{12} J_{21} - J_{22} H^{21} J_{11} - J_{22} H^{22} J_{21} = 74{,}472 - 206{,}632 \,.\, 0{,}001564 \,.\, 93{,}532 - 206{,}632 \,(-0{,}000348)\,(-85{,}540) - (-11{,}420)\,(-0{,}000348) \,.\, 93{,}532 - (-11{,}420) \,.\, 0{,}009169\,(-85{,}540) = 28{,}765$$

$$M_{22} = K_{22} - J_{12} H^{11} J_{12} - J_{12} H^{12} J_{22} - J_{22} H^{21} J_{12} - J_{22} H^{22} J_{22} = 84{,}233 - 206{,}632 \,.\, 0{,}001564 \,.\, 206{,}632 - 206{,}632\,(-0{,}000348)\,(-11{,}420) - (-11{,}420)\,(-0{,}000348) \,.\, 206{,}632 - (-11{,}420) \,.\, 0{,}009169\,(-11{,}420) = 14{,}617$$

Por tanto, tendremos:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \left\| \begin{array}{cc} 86{,}990 & 28{,}765 \\ 28{,}765 & 14{,}617 \end{array} \right\| \end{array}$$

Realizadas estas operaciones preliminares, las ecuaciones, en forma reducida, de nuestro modelo, toman la forma [2]:

$$\begin{aligned} y_1 &= N_{11} z_1 + N_{12} z_3 + B_{11} s_1 + B_{12} s_2 \\ y_2 &= N_{21} z_1 + N_{22} z_3 + B_{21} s_1 + B_{22} s_2 \end{aligned} \qquad [9]$$

los parámetros B_{ij} se determinan de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} B_{11} M_{11} + B_{12} M_{21} &= L_{11} \\ B_{11} M_{12} + B_{12} M_{22} &= L_{12} \\ B_{21} M_{11} + B_{22} M_{21} &= L_{21} \\ B_{21} M_{12} + B_{22} M_{22} &= L_{22} \end{aligned}$$

sustituyendo en M_{ij} y L_{ij} los valores encontrados, darán:

$$\begin{aligned} 86{,}990\, B_{11} + 28{,}765\, B_{12} &= 31{,}613 \\ 28{,}765\, B_{11} + 14{,}617\, B_{12} &= 0{,}234 \end{aligned}$$

se obtiene:

$$B_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 31{,}613 & 28{,}765 \\ 0{,}234 & 14{,}617 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 86{,}990 & 28{,}765 \\ 27{,}765 & 14{,}617 \end{vmatrix}} = 1{,}025$$

$$B_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 86{,}990 & 31{,}613 \\ 28{,}765 & 0{,}234 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 86{,}990 & 28{,}765 \\ 27{,}765 & 14{,}617 \end{vmatrix}} = -2{,}002$$

y de:

$$86{,}990\, B_{21} + 28{,}765\, B_{22} = 27{,}505$$

$$28{,}765\, B_{21} + 14{,}617\, B_{22} = 9{,}818$$

tendremos:

$$B_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 27{,}505 & 28{,}765 \\ 9{,}818 & 14{,}617 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 86{,}990 & 28{,}765 \\ 27{,}765 & 14{,}617 \end{vmatrix}} = 0{,}269$$

$$B_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 86{,}990 & 27{,}505 \\ 28{,}765 & 9{,}818 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 86{,}990 & 28{,}765 \\ 27{,}765 & 14{,}617 \end{vmatrix}} = 0{,}142$$

La matriz B_{ij} resulta entonces formada de los siguientes valores:

$$\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} s_1 & \quad\quad s_2 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0{,}269 & 0{,}142 \\ 1{,}025 & -2{,}002 \end{Vmatrix} \end{array}$$

Por otra parte, los parámetros N_{ij} se obtienen de las ecuaciones:

$$N_{11} H_{11} + N_{12} H_{21} = F_{11}$$
$$N_{11} H_{12} + N_{12} H_{22} = F_{12}$$
$$N_{21} H_{11} + N_{22} H_{21} = F_{21}$$
$$N_{21} H_{12} + N_{22} H_{22} = F_{22}$$

Sustituyendo las distintas H_{ij} y F_{ij} por los valores determinados precedentemente, tendremos:

$$644{,}890\ N_{11} + 24{,}510\ N_{12} = 27{,}059$$
$$24{,}510\ N_{11} + 110{,}000\ N_{12} = -130{,}340$$

se obtiene:

$$N_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -130{,}340 & 110{,}000 \\ 27{,}059 & 24{,}510 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 644{,}890 & 24{,}510 \\ 24{,}510 & 110{,}000 \end{vmatrix}} = 0{,}088$$

$$N_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 644{,}890 & 27{,}059 \\ 24{,}510 & -130{,}340 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 644{,}890 & 24{,}510 \\ 24{,}510 & 110{,}000 \end{vmatrix}} = -1{,}204$$

mientras de:

$$644{,}890\ N_{21} + 24{,}510\ N_{22} = 187{,}568$$
$$24{,}510\ N_{21} + 110{,}000\ N_{22} = -54{,}820$$

obtenemos:

$$N_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 187{,}568 & 24{,}510 \\ -54{,}920 & 110{,}000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 644{,}890 & 24{,}510 \\ 24{,}510 & 110{,}000 \end{vmatrix}} = 0{,}312$$

$$N_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 644{,}890 & 187{,}568 \\ 24{,}510 & -54{,}920 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 644{,}890 & 24{,}510 \\ 24{,}510 & 110{,}000 \end{vmatrix}} = -0{,}569$$

La matriz resultante es la siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \begin{array}{c} z_2 \qquad\qquad z_4 \\ \left\| \begin{array}{cc} 0{,}088 & -1{,}204 \\ 0{,}312 & -0{,}569 \end{array} \right\| \end{array}$$

Por tanto, las ecuaciones en forma reducida —señaladas con [9]— se convierten:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}088\, z_1 - 1{,}204\, z_3 + 1{,}025\, s_1 - 2{,}002\, s_2 \\ y &= 0{,}312\, z_1 - 0{,}569\, z_3 + 0{,}269\, s_1 + 0{,}142\, s_2\, . \end{aligned} \qquad [9a]$$

Sustituyendo las expresiones [8] en las s_i, la [9a] tomará la forma:

$$\begin{aligned} y_1 = {} & 0{,}088\, z_1 - 1{,}204\, z_3 - 1{,}025\, (z_4 - J_{11}\, H^{11}\, z_1 - J_{21}\, H^{21}\, z_1 - \\ & - J_{11}\, H^{12}\, z_3 - J_{21}\, H^{22}\, z_3) - 2{,}002\, (z_2 - J_{12}\, H^{11}\, z_1 - \\ & - J_{22}\, H^{21}\, z_1 - J_{22}\, H^{21}\, z_1 - J_{12}\, H^{12}\, z_3 - J_{22}\, H^{22}\, z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 = {} & 0{,}312\, z_1 - 0{,}569\, z_3 + 0{,}269\, (z_4 - J_{11}\, H^{11}\, z_1 - J_{21}\, H^{21}\, z_1 - \\ & - J_{11}\, H^{12}\, z_3 - J_{21}\, H^{22}\, z_3) + 0{,}142\, (z_2 - J_{12}\, H^{11}\, z_1 - \\ & - J_{22}\, H^{21}\, z_1 - J_{12}\, H^{12}\, z_2 - J_{22}\, H^{22}\, z_3) \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} y_1 = {} & 0{,}088\, z_1 - 1{,}204\, z_3 + 1{,}025\, z_4 - 1{,}025 \,.\, 93{,}532 \,.\, 0{,}001564\, z_1 - \\ & 1{,}025 \,.\, (-85{,}540) \,.\, (-0{,}000348)\, z_1 - 1{,}025 \,.\, 93{,}532 \,. \\ & .\, (-0{,}000348)\, z_3 - 1{,}025 \,.\, (-85{,}540) \,.\, 0{,}009169\, z_3 - \\ & - 2{,}002\, z_2 + 2{,}002 \,.\, 206{,}632 \,.\, 0{,}001564\, z_1 + 2{,}002\, (-11{,}420) \,. \\ & .\, (-0{,}000348)\, z_1 + 2{,}002 \,.\, 206{,}632\, (-0{,}000348)\, z_3 + \\ & + 2{,}002 \,.\, (-11{,}420) \,.\, 0{,}009169\, z_3 \end{aligned}$$

$$y_2 = 0{,}312\, z_1 - 0{,}569\, z_3 + 0{,}269\, z_4 - 0{,}269 \,.\, 93{,}532 \,.\, 0{,}001564\, z_1 - 0{,}269 \,.\, (-85{,}540) \,.\, (-0{,}000348)\, z_1 - 0{,}269 \,.\, 93{,}532 \,.\, (-0{,}000348)\, z_3 - 0{,}269 \,.\, (-85{,}540) \,.\, 0{,}009169\, z_3 + 0{,}142\, z_2 - 0{,}142 \,.\, 206{,}632 \,.\, 0{,}001564\, z_1 - 0{,}142\, (-11{,}420 \,.\, (-0{,}000348)\, z_1 - 0{,}142 \,.\, 206{,}632\, (-0{,}000348)\, z_3 - 0{,}142 \,.\, (-11{,}420) \,.\, 0{,}009169\, z_3$$

o sea:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0{,}563\, z_1 - 0{,}719\, z_3 + 1{,}025\, z_4 - 2{,}002\, z_2 \\ y_2 &= 0{,}218\, z_1 - 0{,}324\, z_3 + 0{,}269\, z_4 + 0{,}142\, z_2 \,. \end{aligned} \quad [9b]$$

Ahora ya podemos calcular los coeficientes estructurales de la ecuación de oferta, que es exactamente "identificable". A tal objeto escribimos la forma reducida en los siguientes términos:

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathrm{B}_{11}\, z_1 - \mathrm{A}_{12}\, z_2 - \mathrm{A}_{13}\, z_3 + \mathrm{A}_{14}\, z_4 \\ y_2 &= \mathrm{B}_{21}\, z_1 + \mathrm{A}_{22}\, z_2 - \mathrm{A}_{23}\, z_3 + \mathrm{A}_{24}\, z_4 \,. \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación $-b_{22}$ y sumándola a la primera relación, obtenemos:

$$y_1 - b_{22}\, y_2 = (\mathrm{B}_{11} - \mathrm{B}_{21}\, b_{22})\, z_1 - (\mathrm{A}_{12} + \mathrm{A}_{22}\, b_{22})\, z_2 - (\mathrm{A}_{13} - \mathrm{A}_{23}\, b_{22})\, z_3 + (\mathrm{A}_{14} - \mathrm{A}_{24}\, b_{22})\, z_4 \,.$$

Recordando que la ecuación para estimar en forma estructural es:

$$y_1 = b_{22}\, y_2 + c_{22}\, z_2 + c_{23}\, z_3 + c_{24}\, z_4$$

tendremos las siguientes igualdades:

$$b_{22} = \frac{\mathrm{B}_{11}}{\mathrm{B}_{21}} = 2{,}583$$

$$\begin{aligned} c_{22} &= -\mathrm{A}_{12} - \mathrm{A}_{22}\, b_{22} = 2{,}369 \\ c_{23} &= \mathrm{A}_{13} + \mathrm{A}_{23}\, b_{22} = 0{,}118 \\ c_{24} &= \mathrm{A}_{14} - \mathrm{A}_{24}\, b_{22} = 0{,}330 \,. \end{aligned}$$

La ecuación estructural de la oferta se presenta, de forma definitiva, como sigue:

$$y_1 = 2{,}583\, y_2 - 2{,}369\, z_2 + 0{,}118\, z_3 + 0{,}330\, z_4 .$$

Para estimar los parámetros de la ecuación de demanda debemos calcular las siguientes cantidades:

Matriz P_{ij}

$$P_{11} = L_{11}\, B_{11} + L_{12}\, B_{12} = 31{,}613 \,.\, 1{,}025 + 0{,}234\, (-2{,}002) = 31{,}938$$
$$P_{12} = L_{11}\, B_{21} + L_{12}\, B_{22} = 31{,}613 \,.\, 0{,}269 + 0{,}234 \,.\, 0{,}142 = 8{,}53$$
$$P_{21} = L_{21}\, B_{11} + L_{22}\, B_{12} = 27{,}505 \,.\, 1{,}025 + 9{,}818\, (-2{,}002) = 8{,}537$$
$$P_{22} = L_{21}\, B_{21} + L_{22}\, B_{22} = 27{,}050 \,.\, 0{,}269 + 9{,}818 \,.\, 0{,}142 = 8{,}793$$

$$\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 31{,}938 & 8{,}537 \\ 8{,}537 & 8{,}793 \end{array} \right\| \end{array}$$

Matriz Q_{ij}

$$Q_{11} = E_{11} - P_{11} - F_{11}\, N_{11} - F_{12}\, N_{12} = 282{,}676 - 31{,}935 -$$
$$- 27{,}059 \,.\, 0{,}088 + 130{,}340\, (-1{,}204) = 155{,}301$$
$$Q_{12} = E_{12} - P_{12} - F_{11}\, N_{21} - F_{12}\, N_{12} = 113{,}282 - 8{,}537 -$$
$$- 27{,}059 \,.\, 0{,}312 + 130{,}340\, (-0{,}569) = 39{,}201$$
$$Q_{21} = E_{12} - P_{12} - F_{11}\, N_{21} - F_{12}\, N_{22} = 113{,}282 - 8{,}537 -$$
$$- 187{,}568 \,.\, 0{,}088 + 54{,}920\, (-1{,}204) = 39{,}201$$
$$Q_{22} = E_{22} - P_{22} - F_{21}\, N_{21} - F_{22}\, N_{22} = 129{,}231 - 8{,}793 -$$
$$- 187{,}568 \,.\, 0{,}312 + 54{,}920\, (-0{,}569) = 48{,}254$$

$$\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 155{,}301 & 39{,}201 \\ 39{,}201 & 48{,}254 \end{array} \right\| \end{array}$$

Para determinar los parámetros contenidos en la ecuación de la demanda debemos introducir el multiplicador de Lagrange y formar un sistema de ecuaciones homogéneas con base en la expresión:

$$\sum_{s=1}^{H} b_{js} (P_{ks} - \nu\, Q_{ks}) = 0$$

expuesta en la página 414 y designada por [17]. Tendremos, por tanto:

$$\begin{aligned} (P_{11} - \nu\, Q_{11})\ b_{11} + (P_{12} - \nu\, Q_{12})\ b_{12} &= 0 \\ (P_{21} - \nu\, Q_{21})\ b_{11} + (P_{22} - \nu\, Q_{22})\ b_{12} &= 0\,. \end{aligned} \qquad [10]$$

Sustituyendo en [10] los valores de P_{ij} y Q_{ij}, obtenidos precedentemente, tendremos:

$$\begin{aligned} (31{,}935 - 155{,}301\ \nu)\ b_{11} + (8{,}537 - 39{,}201\ \nu)\ b_{12} &= 0 \\ (\ 8{,}537 - \ 39{,}201\ \nu)\ b_{21} + (8{,}793 - 48{,}254\ \nu)\ b_{22} &= 0\,. \end{aligned} \qquad [10a]$$

Igualando a cero el determinante de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} (31{,}935 - 155{,}301\ \nu) & (8{,}537 - 39{,}201\ \nu) \\ (\ 8{,}537 - \ 39{,}201\ \nu) & (8{,}793 - 48{,}254\ \nu) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Y resolviéndolo se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$5.957\ \nu^2 - 2.237\ \nu + 208{,}000 = 0$$

cuyas raíces son:

$$0{,}206 \quad \text{y} \quad 0{,}169\,.$$

En virtud de los motivos expuestos anteriormente, escogemos la raíz más pequeña ($\nu = 0{,}169$) y haciendo, para normalizar, $b_{11} = -1$, de la primera ecuación del sistema [10], se obtiene:

$$b_{12} = \frac{(P_{11} - \nu\, Q_{11})}{(P_{12} - \nu\, Q_{12})} = 2{,}975\,.$$

Determinemos ahora los valores de los coeficientes estructurales c_{ij} :

$$c_{11} = -b_{11}\,N_{11} - b_{12}\,N_{21} = 0{,}088 - 2{,}975\,.\quad 0{,}312 \;= -0{,}840$$
$$c_{13} = -b_{11}\,N_{12} - b_{12}\,N_{22} = 1{,}204 - 2{,}975\,.\,(-0{,}569) = \quad 0{,}489\,.$$

Por lo tanto, la ecuación de la demanda se presenta con los siguientes parámetros estructurales:

$$y_1 = 2{,}975\,y_2 - 0{,}840\,z_1 + 0{,}489\,z_3\,.$$

En nuestro modelo estructural, por tanto, tomará como forma definitiva:

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = 2{,}975\,y_2 - 0{,}840\,z_1 + & \\ \quad + 0{,}489\,z_3 & \text{(ecuación de la demanda)} \\ & \\ y_1 = 2{,}583\,y_2 - 2{,}369\,z_2 + & \\ \quad + 0{,}118\,z_3 + 0{,}330\,z_4 & \text{(ecuación de la oferta)}\,. \end{array}\right\} \quad [11]$$

Sustituyendo en la [11] a las variables y_2, z_1, z_2, z_3, z_4, los relativos valores —expresados bajo forma de desviaciones y contenidos en las tablas dadas anteriormente—, obtendremos dos nuevas cantidades, que llamaremos y'_1 (demanda) e y''_2 (oferta), cuyos valores anuales se expresan en la siguiente tabla:

	y'_1	y''_1
1928	— 0,129	— 0,688
29	14,277	13,591
30	10,804	8,630
31	— 0,977	— 2,093
32	— 2,872	0,936
33	— 1,707	0,444
34	— 6,241	— 6,820
35	— 10,186	— 6,096
36	3,016	— 0,874
37	— 1,363	— 0,294
38	— 4,622	— 6,736

Por otro lado, sustrayendo los susodichos valores por los relativos a y_1 (véase la tabla de las desviaciones) se obtienen los valores residuales, o sea, de las variables aleatorias ε_1 y ε_2:

	ε_1	ε_2
1928	4,80	5,36
29	— 4,71	— 4,02
30	— 6,92	— 4,75
31	0,15	1,86
32	4,45	0,64
33	5,99	3,84
34	0,31	0,89
35	4,46	0,37
36	— 9,45	— 5,56
37	— 3,47	— 4,54
38	4,39	6,51

En fin, si se pasa de las desviaciones a los valores, es decir, si se suman algebraicamente a los residuos los valores tomados por la variable y_1 (expresados en números índice y contenidos en la tabla número 5, tendremos:

	y'_1	y''_1
1928	100,13	100,69
29	90,62	91,31
30	88,41	90,58
31	95,48	96,59
32	99,78	95,97
33	101,32	99,17
34	95,64	96,22
35	99,79	95,70
36	85,88	89,77
37	91,86	90,79
38	99,72	101,84

Como en la lección anterior hicimos con el modelo expuesto en ella, introducimos en las ecuaciones estructurales los valores en lugar de las desviaciones. Obteniendo:

$$(Y_1 - 95{,}33) = 2{,}975\,(Y_2 - 96{,}11) - 0{,}840\,(Z_1 - 88{,}98) + \\ + 0{,}489\,(Z_3 - 6)$$

$$(Y_1 - 95{,}33) = 2{,}583\,(Y_2 - 96{,}11) - 2{,}369\,(Z_2 - 94{,}83) + \\ + 0{,}118\,(Z_3 - 6) + 0{,}330\,(Z_4 - 96{,}84)$$

por lo cual:

$$Y_1 = 2{,}975\,Y_2 - 0{,}840\,Z_1 + 0{,}489\,Z_3 - 118{,}788$$
$$Y_1 = 2{,}583\,Y_2 - 2{,}369\,Z_2 + 0{,}118\,Z_3 + 0{,}330\,Z_4 + 39{,}065\,.$$

En este punto podemos calcular la elasticidad tomando para cada variable su valor medio (Y y Z):

Demanda:

Elasticidad respecto a los precios de venta.

$$\frac{d y_1}{d y_2} \frac{Y_2}{Y_1} = 2{,}975 \frac{96{,}11}{95{,}33} = 2{,}999$$

Elasticidad respecto a la renta.

$$\frac{d y_1}{d z_1} \frac{Z_1}{Y_1} = -0{,}84 \frac{88{,}98}{95{,}33} = -0{,}795$$

Oferta:

Elasticidad respecto a los precios de venta.

$$\frac{d y_1}{d y_2} \frac{Y_2}{Y_1} = 2{,}583 \frac{96{,}11}{95{,}33} = 2{,}604$$

Elasticidad respecto a los costes de producción.

$$\frac{d y_1}{d z_2} \frac{Z_2}{Y_1} = -2{,}369 \frac{94{,}83}{95{,}33} = -2{,}357$$

Elasticidad respecto a los precios de venta en el año precedente.

$$\frac{d y_1}{d z_4} \frac{Z_4}{Y_1} = 0{,}330 \frac{96{,}84}{95{,}33} = 0{,}335$$

* * *

Comparemos los valores de la elasticidad obtenidos del nuevo modelo con los determinados en la lección anterior, para ver si hay alguna diferencia sensible. Al introducir la variable "precios de venta de los bienes alimenticios en el año precedente" en la ecuación de la oferta, ha dado lugar a resultados que difícilmente pueden explicarse a la luz de la teoria económica. En efecto, la nueva variable —por nosotros introducida para ver cómo se avienen, en la práctica, la estimación de los parámetros con el método de la máxima verosimilitud con información limitada— ha alterado el significado de los resultados relativos a la demanda y a la oferta de los bienes alimenticios, determinados en la lección VIII.

Todavía, a fines didácticos, podemos resumir los resultados obtenidos:

1) Por término medio, un aumento del 1 por 100 en los precios de los géneros alimenticios ha tenido como contrapartida un incremento en la demanda de cerca del 3 por 100. Por otro lado, por una disminución del 1 por 100 en la renta real por cabeza, la demanda se ha contraído cerca del 0,8 por 100.

2) Una disminución del 1 por 100 en los precios de los bienes que examinamos ha provocado, por término medio, un contracción en la cantidad ofrecida del 2,60 por 100. En fin, por un aumento del 1 por 100 en los costes de producción, la cantidad ofrecida de los bienes alimenticios disminuyó en cerca del 2,4 por 100, y por un aumento del 1 por 100 en los precios de venta del año precedente la cantidad ofrecida aumentó en el 0,33 por 100.

CONCLUSIONES

Antes de llegar a alguna conclusión echemos una mirada rápida a cuanto hemos tratado en el breve curso de nuestras lecciones.

Expuesto el concepto de modelo, sus elementos constituyentes y fines que el econometrista se propone alcanzar en las investigaciones realizadas con el modelo (lección I), nos hemos ocupado de los modelos no estocásticos; tanto estáticos como dinámicos. Hemos visto cómo se realiza la construcción del modelo dado y su dependencia con la teoría económica (lección II y III). Inmediatamente hemos examinado las principales contribuciones de los miembros de la comisión Cowles en el campo de los modelos econométricos: los modelos estocásticos (lección IV) y el problema de la identificación de las relaciones estructurales (lección V).

Hemos expuesto dos métodos estadísticos que pueden adoptarse por los econometristas para estimar los valores numéricos de los parámetros que aparecen en el modelo: el método de los mínimos cuadrados (lección VI) y el de la máxima verosimilitud con información limitada (lección VII). Hemos considerado inmediatamente dos modelos microeconómicos, y después de haber estimado los valores de los parámetros contenidos en ella, hemos determinado algunas elasticidades y comentado su significado económico.

El mérito de la investigación empírica realizada con el modelo es evidente. El empleo de la matemática constituye en sí una gran ventaja: no sólo esta forma de expresión es clara y al mismo tiempo rigurosa y raramente sujeta a interpretaciones arbitrarias como muchas veces ocurre, adoptando la forma literaria, sino que además representa la forma más apropiada para una teoría cuantitativa. El empleo de la matemática permite el usar procedimientos estadísticos, que permiten estimar los valores numéricos de los parámetros contenidos en el modelo econométrico y realizar previsiones cautas formuladas en términos probabilísticos y para cortos períodos del valor futuro de las variables que se consideran.

En el caso más sencillo, cuando no han ocurrido variaciones estructurales del sistema económico en el período observado y en el caso en que se hayan de realizar previsiones, se insertarán en el modelo los nuevos valores tomados por las variables exógenas en el período de previsión y resolver el sistema de ecuaciones respecto a las variables endógenas. Una hipótesis de este tipo se encuentra muy raramente en la realidad. Por lo cual, si los cambios en las condiciones iniciales han sido numerosos o no se está en disposición de estimar el valor tomado por las variables que han sufrido el cambio, difícilmente se podrán formular previsiones dignas de crédito.

Llegados a este punto, debemos recalcar algunas limitaciones que tienen las investigaciones realizadas por los modelos econométricos (limitaciones propias, en gran parte, del análisis cuantitativo).

En distintas ocasiones no hemos dejado de observar que el estudioso, que tiene como objetivo obtener sistemas de relaciones posibles y resolverlas prácticamente, por ello considera un número restringido de variables, que tienen influencia sobre un fenómeno económico dado. Quizá alguna variable importante se sustituya por otra afín al no haber datos estadísticos de la primera. La poca exactitud con que se miden y publican las observaciones empíricas; la hipótesis, no siempre real, de que los componentes estocásticos sean independientes una de otra, e incorrelacionadas serialmente y de naturaleza aditiva; por último, la imperfecta adaptabilidad de los instrumentos estadísticos a los fenómenos económicos; constituyen obstáculos para alcanzar resultados estables, y, por lo tanto, para hacer previsiones sobre el valor futuro de esta variable económica.

Es por lo que la comprobación externa de las proposiciones sacadas de la revelación empírica —problema éste estrechamente ligado a la formulación de previsiones— es en economía menos riguroso que en cualquier otra ciencia empírica, para las cuales la falta de adaptación de las previsiones es motivo suficiente para rechazar una teoría. Es, como ha dicho recientemente Turbergen, las proposiciones finales en economía (y en este caso la teoría basada sobre un modelo econométrico) que se quieren comprobar, puede verse que son infundadas e incompletas, demostrando que no interesa esta o aquella serie de datos estadísticos. Y también en el caso de que una teoría parezca que se adapta a la realidad, puede pensarse que hechos nuevos o estudios teóricos más exactos revelarán la existencia de una teoría más próxima a la realidad; o sea, mejor que la primera.

No obstante las limitaciones dichas, la investigación empírica llevada a efecto con los modelos econométricos de varias ecuaciones han dado conclusiones valiosas para la interpretación de la realidad, bastante mejores que las alcanzadas por otros métodos. Por lo tanto, dada la utilidad que presenta esta reciente dirección de la investigación, y no dejando de decir que la técnica de modelos está en estado embrionario y en zona de sombra, es evidente la necesidad de emprender nuevos estudios teóricos para eliminar, o reducir, los obstáculos existentes.

ADALBERTO PREDETTI

TEMAS Y POLEMICAS

Pocas cuestiones han merecido tanto la atención de los economistas profesionales en tiempos recientes como la que hoy traemos a esta Sección. El carácter normativo de las proposiciones económicas es consustancial a su naturaleza desde que Smith unió la doble rama especulativa y práctica, en la que casualmente había brotado la investigación económica hasta su tiempo, en el sistemático tronco de «La Riqueza de las Naciones». Más adelante, cuando la exigencia de elaborar disciplinas positivas se impuso con gran vigor en todos los campos científicos, la Economía siguió buscando la inspiración del quehacer práctico con un conjunto de normas que vinieron a integrar un campo al que se conoció bajo la denominación de «Economía del Bienestar».

Este afán de inspirar la práctica económica posee varias direcciones, en las que recibe un tratamiento diferente derivado de la especial posición de los investigadores. Y es justo resaltar entre estas varias formulaciones la aportación realizada por los economistas de Cambridge. No es, por tanto, hecho imputable al azar el que se deba a ellos la introducción sistemática del término (welfare economics) en la Ciencia Económica y en su ordenado tratamiento, que culmina con las aportaciones de Pigou y Kahn.

Esta tradición normativa de las proposiciones económicas habría de sufrir un duro ataque, iniciado en Inglaterra en los años siguientes al de 1930, cuando Hicks y Allen reformularon la teoría del valor subjetivo de acuerdo con los postulados de Pareto y Slutsky, al mismo tiempo que Robbins publicaba su célebre «Ensayo» que, resucitando la vieja controversia sobre los juicios de valor, pretendía excluir del campo de la Economía a la Economía del Bienestar.

La gravedad de esta situación quedó diagnosticada por Harrod, quien instaba a los economistas para que no abandonasen la reelaboración de proposiciones de naturaleza normativa que pudiesen integrar el viejo campo de la Economía del Bienestar.

Los intentos que han ensayado cumplir con tal consejo se han multiplicado desde entonces (1938) y la polémica se ha intensificado de tal manera en torno a ellos, que dificulta extraordinariamente la la comprensión de su línea argumental.

Es a su análisis —y por supuesto a su continuación— al que se *ha dedicado recientemente el representante más fiel de la tradición de Cambridge: D. H. Robertson. Su personalísima posición en el debate y su conocida facilidad y elegancia expositivas han decidido a la* Revista de Economía Política *a publicar su ensayo «Utility and all that» que, como era de esperar, no ha cerrado la controversia sobre los puntos tratados, puesto que muy pronto Robbins se ha lanzado al debate arrastrando tras sí a J. R. Hicks. Al mismo tiempo que esto ocurría, otros muchos escritores volvían sobre los puntos debatidos y obligaban —sin transcurrir mucho tiempo— a que Robertson escribiese un nuevo reportaje, «Utility and all what?», que fué comentado por Friedman, trayendo al palenque de la controversia nuevas armas científicas cuyo inicial empleo anuncia el estado provisional de la discusión. Quizá de ésta no salga con rapidez la luz definitiva —que rara vez se logra en el campo científico— pero si cabe esperar nuevas aclaraciones que abran el camino de la futura investigación, como de hecho ha ocurrido ya. En este sentido de fomentar la investigación futura, la polémica sobre la Economía del Bienestar ha resultado de utilidad indudable. Esta es la primera razón por la que se ha juzgado de interés el ofrecerla a nuestros lectores. Pero existe una segunda justificación que legitima no sólo la importancia de la controversia que se inserta, sino asimismo el sentido de esta Sección de nuestra Revista, puesto que la controversia sobre la Economía del Bienestar obliga como pocas a un repaso de muchos problemas fundamentales de la Ciencia Económica. Y es de esperar que la prosa vivaz de Robertson, o la elegancia expositiva de Robbins, o la claridad conceptual de Hicks o el sugestivo planteamiento metodológico de Friedman lleven a nuestros lectores hacia el estudio más detenido y extenso de esta controversia, de la que obtendrán —como ha indicado recientemente Boulding— bastantes conocimientos de Economía, aunque quizás no tantos de Economía del Bienestar. Quizás porque para lograr este último objetivo resulte imprescindible el progreso en el conocimiento de las proposiciones positivas.*