Reflexiones sobre la teoría de la decisión. Especial consideración del análisis bayesiano

ANDRES-SANTIAGO SUAREZ SUAREZ

Catedrático de Economía de la Empresa
de la Facultad de Ciencias Económicas de
Málaga (Universidad de Granada)

1. CONSIDERACIONES PREVIAS Y PERSPECTIVA HISTORICA

El empresario como jefe de la unidad económica de producción tiene que adoptar constantemente decisiones económicas. Así, adopta decisiones de producción, de inversión, de financiación, etc. Por ello, al empresario siempre se le consideró como un hombre con gran intuición y experiencia, condiciones necesarias para poder decidir con éxito. Sin embargo, a medida que la realidad económica se ha ido haciendo más compleja, la intuición y la experiencia han resultado insuficientes; ha ido surgiendo la necesidad de elaborar científicamente las decisiones. Actualmente las decisiones económico-empresariales se adoptan después de estudios técnicos concienzudos, la intuición y la experiencia —que si bien siguen siendo valiosas— tienen cada vez menos importancia para el hombre de negocios.

Se ha dicho, y no sin razón, que la Ciencia Económica es la ciencia de la decisión. De aquí que históricamente las diferentes construcciones teoréticas se hayan valorado en función de su aptitud para adoptar decisiones.

Una de las críticas que se le ha dirigido al marginalismo es la de que no tiene en cuenta la información del sujeto decisor, supone todo conocido cuando en realidad no lo es. Si la empresa no puede conocer su coste marginal y su ingreso marginal es inútil que se le aconseje que haga estas dos magnitudes iguales. El olvido del papel de la información por parte del marginalismo es debido, sin duda, a la hipótesis de competencia perfecta.

"El análisis marginal no proporciona reglas de decisión más que en el caso de información perfecta, lo que tiene poca probabilidad de realizar-se en la práctica. Los desarrollos teóricos modernos constituyen un paso adelante hacia la elaboración de decisiones en el caso de información imperfecta" (1).

La Investigación Operativa ha supuesto un gran avance en el proceso de elaboración científica de las decisiones económicas. No en vano G. Morlat (2), al igual que otros muchos autores, dice que: "La Investigación Operativa tiene por objeto la preparación de decisiones que incumben a una autoridad responsable".

Mucho se ha discutido sobre la naturaleza de la Investigación Operativa. Son múltiples las definiciones que se han dado de la misma, un buen ejemplo de ello lo constituye el trabajo de R. Companys: "La Investigación Operativa", publicado recientemente en una revista especializada (3). Lo cual hizo que Philip Morse propugnara de forma un tanto desesperada la siguiente definición:

"La Investigación Operativa es la realizada por los miembros de la Sociedad de Investigación Operativa de América, y sus métodos son los preconizados por la revista de esta Sociedad."

Estamos de acuerdo con los autores —como, por ejemplo, H. H. Jenny (4)— que consideran que la finalidad de la Investigación Operativa es determinar el funcionamiento óptimo de un sistema, fundamentalmente de sistemas organizativos.

Por "sistema" hay que entender aquí todo conjunto complejo u orgánico de elementos relacionados de algún modo. El hombre, la Iglesia católica, un partido político, el Sol y sus planetas, etc., constituyen sistemas. Los elementos que definen un sistema, según S. L. Optener (5), son los siguientes:

1. Los *objetos*, que son los parámetros del sistema. Todo parámetro

---

(1) K. E. BOULDING: *Etat actual de la théorie de l'entreprise*, en K. E. BOULDING y W. A. SPIVEY: *La programmation linéaire et la théorie de l'entreprise*, Dunod, París, 1964, pág. 6.

(2) G. MORLAT: *Qu'est-ce que la Recherche Opérationnelle*, Gestion, abril, 1963, págs. 180-188.

(3) R. COMPANYS: *La investigación operativa*, "Cuadernos de Estadística Aplicada e Investigación Operativa", vol. VI, fasc. 4, 1969, págs. 263-298.

(4) H. H. JENNY: *La recherche Opérationnelle: sa nature, son champ d'application et quelques comentaires sur l'influence qu'elle peut avoir sur la régularisation des fluctuations économiques*, en K. E. BOULDING y W. A. SPIVEY, *ob. cit.*, páginas 163-186.

(5) L. OPTENER: *L'analyse des systèmes et les problèmes de gestion*, Dunod, París, 1968, págs. 33-34.

puede tomar diferentes valores que describen el estado del sistema.

2. Los *atributos*, es decir, las propiedades de los objetos.
3. Las *relaciones* que ligan los objetos y los atributos en el interior del sistema.

Desde el punto de vista de la dirección la empresa constituye un sistema, el cual engloba múltiples sistemas más pequeños o subsistemas; por ejemplo, los problemas de afectación o asignación, los problemas de almacén, los problemas de concurrencia y conflicto, los problemas de información, los fenómenos de aglomeración y espera, etc. Estos subsistemas son los que más frecuentemente han tratado de optimizar los especialistas en Investigación Operativa. Sin embargo, es fácil advertir que las suboptimizaciones parciales no garantizan el funcionamiento óptimo de un sistema; no obstante, las optimizacones globales resultan muy difíciles en los momentos actuales debido a la existencia de factores no cuantificables e incontrolables y también debido a que resultarían muy lentas y costosas.

La dirección de una empresa tiene como función esencial utilizar todos sus recursos de la manera más eficaz. Supone integrar todos sus recursos en un sistema que se dirigirá convenientemente para alcanzar los objetivos establecidos. La misión más importante de los directivos de una empresa es, pues, establecer y desarrollar sistemas de gestión.

"Así, el concepto de sistema se introduce en la definición misma del "management". Se opone a la definición clásica de organización que no consideraba en la empresa más que una yuxtaposición de mecanismos técnicos y administrativos, los cuales debían funcionar individualmente de la mejor forma posible. Lo que separa estas dos aproximaciones no es solamente el tener en cuenta la interdependencia de las diversas partes (o subsistemas) y la consideración de un objetivo global, sino también la puesta en evidencia de la vida propia y del dinamismo interno de todo grupo social" (6).

Los modelos económicos clásicos son muy simplistas. A medida que el mundo económico se ha ido haciendo más complejo se vio claramente su ineficacia para orientar las decisiones. Ha surgido la necesidad de modelos más realistas para resolver los múltiples problemas que se plantean

(6) J. MELÉSE: *La gestion par les systèmes,* Hommes et Techniques, París, 1968, pág. 10.

en la gran empresa. La finalidad de la investigación operativa ha sido contribuir a esta importante cuestión.

Por ello, nos atrevemos a afirmar que la denominación "Investigación Operativa" además de expresar un arsenal de conocimientos sistematizados derivados del campo de la Ciencia Matemática y de la Estadística, indica una orientación nueva —mucho más realista y operativa— en la resolución de los problemas económicos. Supone una nueva mentalidad, o bien, como algún autor ha afirmado, un cierto estado del espíritu.

Entre las múltiples teorías particulares que comprende la Investigación Operativa (ver 7), figura la "Teoría de la Decisión".

2. LA TEORIA DE LA DECISION

2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La Teoría de la Decisión incorpora explícitamente la incertidumbre y pretende dar solución a los problemas planteados bajo esa perspectiva.

Todo problema de Teoría de la Decisión consta de los siguientes elementos:

1. Varias líneas de acción a seguir por la persona encargada de tomar la decisión, también llamadas estrategias, salidas o alternativas.

2. Varios estados o situaciones que la naturaleza puede presentar, los cuales pueden venir dados en términos de probabilidad. Teniendo aquí la palabra naturaleza un significado muy amplio, en realidad indica todo lo que es ajeno al sujeto decisor, o mejor aún, todo lo que escapa a su control (coyuntura económica, panorama político internacional, tiempo atmosférico, etc.).

3. Un resultado, generalmente cifrado en términos monetarios, que será diferente según la estrategia adoptada y el estado que la naturaleza presente.

(7) J. WANTY: *Contenu et portée de la science du management*, "Organisation Scientifique", núm. 4, 1969, págs. 129-141.

Así, llamando:

S_i : Estrategia o decisión i-ésima, para i = 1,2. . . ., m.

E_j : Estado de la naturaleza j-ésimo, para j = 1,2. . . ., n.

P_j : Probabilidad del estado E_j (muchas veces desconocida).

R_{ij} : Resultado obtenido cuando se elige la estrategia S_i y la naturaleza presenta el estado E_j

Se denomina matriz de decisión, o matriz de pagos (utilizando la terminología de Teoría de los Juegos de estrategia), a la siguiente:

NATURALEZA

		P_1	P_2	. . .	P_j	. . .	P_n
		E_1	E_2	. . .	E_j	. . .	E_n
	S_1	R_{11}	R_{12}	. . .	R_{1j}	. . .	R_{1n}
	S_2	R_{21}	R_{22}	. . .	R_{2j}	. . .	R_{2n}
DECISOR	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
	S_i	R_{i1}	R_{i2}	. . .	R_{ij}	. . .	R_{in}
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
	S_m	R_{m1}	R_{m2}	. . .	R_{mj}	. . .	R_{mn}

Fig. 1.- MATRIZ DE DECISION

Las estrategias y los estados de la naturaleza, según M. K. Starr (8), constituyen la esencia de los problemas de decisión.

(8) M. K. STARR: *Le choixdes produiuts et la théorie de la décision*, Dunod, París, 1965, pág. 19.

Todos los problemas de Teoría de la Decisión pueden sintetizarse, pues, en el siguiente modelo:

$$R_{ij} = F (S_i , E_j) \qquad (1)$$

en donde

S_i : Variable independiente controlable.
E_j : Variable independiente incontrolable.
R_{ij}: Variable dependiente o resultado de la decisión.

Se ha hecho clásico dividir en cuatro categorías las formas de incertidumbre susceptibles de afectar a las consecuencias de las posibles estrategias: a) Universo (*) cierto o subjetivamente cierto. b) Universo aleatorio. c) Universo antagonista. d) Universo indeterminado.

2.2. Universo cierto

Se supone información perfecta al igual que en el análisis económico clásico. Cada estrategia o línea de acción tiene una sola consecuencia al existir un solo estado de la naturaleza (situación) con una probabilidad igual a la unidad. Esta situación difícilmente se da en la realidad.

La matriz de decisión en este caso será (véase figura 2).

2.3. Universo aleatorio

Ante una estrategia o línea de acción puede presentarse no una sola situación o estado de la naturaleza, sino varios, cada uno de ellos con una determinada probabilidad. La matriz de decisión en este caso viene dada por la figura 1.

En un universo aleatorio el criterio de decisión racional es el consistente en maximizar la esperanza matemática de ganancia. El sujeto decisor debe elegir aquella línea de acción que le proporcione la máxima esperanza matemática de beneficio. Este criterio, sin embargo, como muy bien

(*) Utilizamos aquí el concepto de "Universo" como sinónimo del conjunto de estados de la naturaleza.

NATURALEZA

		$P_L = 1$
		E_L
	S_1	R_{1L}
	S_2	R_{2L}
DECISOR	. . .	. . .
	S_i	R_{iL}
	. . .	. . .
	S_m	R_{mL}

Fig. 2.- MATRIZ DE DECISION

dice J. J. Lambín (9), "no puede aplicarse más que a los fenómenos sometidos a la ley de los grandes números, ya que es solamente en razón del carácter reiterativo del fenómeno estudiado por lo que el centro de decisión tiene la seguridad de ver su ganancia media converger hacia el valor medio esperado". Esto hace que dicho criterio tenga a veces un valor práctico bastante limitado ya que la mayoría de los problemas económicos no presentan ese carácter reiterativo.

Por otra parte, el criterio de la esperanza matemática también ha sido revisado a la luz de las modernas corrientes utilitaristas. Pues los valores monetarios contenidos en la matriz de pago, al ser utilizados por diferentes decisores, tienen un valor subjetivo distinto. Así, lo que se debe calcular y comparar no son las esperanzas matemáticas de beneficio sino de utilidad (la llamada "esperanza matemática moral").

El iniciador de esta línea de pensamiento ha sido D. Bernouille en la

(9) J. J. Lambin: *Información, decisión y eficacia comercial*, Deusto, Bilbao, 1969, pág. 214.

primera mitad del siglo XVIII. Este especialista trató de mejorar el criterio de la esperanza matemática que por aquel entonces ya se admitía, pero se mostraba incapaz de explicar nuestro comportamiento en ciertas situaciones. Los autores J. von Neumann y O. Morgenstern (10) han ahondado en las ideas de D. Bernouille, estudiando con rigor la noción de utilidad y su incidencia en nuestra conducta.

D. Bernouille (11) estudia el caso del pobre diablo poseedor de un billete de lotería que tiene un 50 por 100 de ganar 20.000 ducados y un 50 por 100 de no ganar nada. Su esperanza matemática de ganancia es de 10.000 ducados. Sin embargo, sería razonable que dicho jugador pobre aceptase la suma de 9.000 ducados ofrecidos por un señor rico antes del sorteo. La explicación de esta paradoja radica, sin duda, en que es diferente la suma de moneda de la suma de utilidad. No es la esperanza de renta lo que hay que considerar, sino la esperanza de utilidad.

En los últimos diez años se han publicado innumerables trabajos en los que se introduce explícitamente la utilidad en la toma de decisiones y se dan orientaciones para la obtención experimental de la curva de utilidad o preferencial (ver 12).

No cabe duda que el empresario intenta maximizar la probabilidad de hacerse rico a la vez que pretende minimizar la probabilidad de ruina. Ello le origina un conflicto o compromiso, pues normalmente no puede uno aspirar a ser rico sin correr el riesgo de arruinarse. Se trata de un problema de equilibrio. "Volvemos a encontrarnos aquí con una línea de pensamiento igual a la de la programación lineal (maximización sujeta a restricciones)" (13).

Hemos querido apuntar aquí las limitaciones del criterio de la esperanza matemática. Sin embargo, bien sea trabajando con valores monetarios o con utilidades, sigue siendo un criterio muy utilizado.

2.4. Universo antagonista

Hasta ahora hemos supuesto que los diferentes estados de la naturaleza E_j eran independientes de la estrategia del sujeto decisor. No obstante,

(10) J. von Neumann y O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, 1970, págs. 15-29.

(11) P. Massé: *La elección de las inversiones,* Sagitario, Barcelona, 1963, página 230.

(12) J. S. Hammond: *Better decisions with preference theory,* "Harvard Business Review", noviembre-diciembre, 1967, págs. 123-141.

(13) P. Massé, *ob. cit.,* pág. 234.

hay casos en que la situación es bien diferente; los estados F_j son las estrategias de otros individuos, oponente del sujeto decisor, que tratan de dejar a éste en la situación más desventajosa. En el mundo de la economía se dan bastantes problemas de este tipo, basta pensar, por ejemplo, en el monopolio bilateral.

El problema de la determinación de la línea de acción o estrategia es ahora mucho más complicado que antes y requiere una nueva teoría. Ello originó la Teoría de los Juegos desarrollada ya en 1928 por J. von Neumann y O. Margenstern (14).

Como muy bien dice S. A. Ozga (15), la hipótesis principal de la Teoría de los Juegos bipersonales y de "suma cero" "es la de dar un valor completo o máximo a la posibilidad que da al oponente la recompensa máxima y al jugador la recompensa mínima, se supone que el individuo tiene que elegir su estrategia de forma que haga máxima esta recompensa mínima". Esta supuesta conducta se denomina normalmente hipótesis "maximín".

No entramos en más detalles sobre la Teoría de los Juegos ya que ello resultaría excesivamente largo.

2.5. Universo indeterminado

Este es el caso de mayor incertidumbre. Los diferentes estados de la naturaleza pueden presentarse con una probabilidad desconocida.

La matriz de decisión en este caso será (véasea figura 3).

Un gran número de criterios objetivos han sido definidos para orientar la conducta del sujeto decisor, criterios que se apoyan en diferentes supuestos que tratan de suplir la falta de información. Nosotros vamos a estudiar aquellos que consideramos más usuales.

2.5.1. *Criterio de Laplace*

Este criterio, también llamado de Bayes o de igual verosimilitud, *supone* que los diferentes estados de la naturaleza son equiprobables. Mediante este supuesto se convierte el universo indeterminado en un uni-

(14) J. von Neumann y O. Morgenstern, *ob. cit.*
(15) S. A. Ozga: *Las expectativas en teoría económica,* Labor, Barcelona, 1967, pág. 223.

NATURALEZA

		E_1	E_2	$\cdots$	E_j	$\cdots$	E_n
	S_1	R_{11}	R_{12}	$\cdots$	R_{1j}	$\cdots$	R_{1n}
	S_2	R_{21}	R_{22}	$\cdots$	R_{2j}	$\cdots$	R_{2n}
DECISOR	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	S_i	R_{i1}	R_{i2}	$\cdots$	R_{ij}	$\cdots$	R_{in}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	S_m	R_{m1}	R_{m2}	$\cdots$	R_{mj}	$\cdots$	R_{mn}

Fig. 3.- MATRIZ DE DECISION

verso aleatorio. Por ello, se elegirá aquella estrategia que haga máxima la esperanza matemática de ganancia. Es decir:

$$\underset{i}{\text{Máx.}} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} R_{ij} \right] \tag{2}$$

2.5.2. *Criterio pesimista o de Wald*

Este criterio ha sido adaptado (más bien trasladado) a la Teoría de la Decisión por A. Wald, partiendo del criterio del "minimáx" desarrollado por J. von Neumann y O. Morgenstern a propósito de la Teoría de los Juegos. Es un criterio excesivamente prudente y conservador y consiste en *suponer* que la naturaleza presentará siempre el estado más desfavorable cualquiera que sea la línea de acción elegida por el sujeto decisor. Por ello, se escogerá la estrategia:

$$\underset{i}{\text{Máx.}} \left[\underset{j}{\text{Mín.}}\ R_{ij} \right] \tag{3}$$

2.5.3. *Criterio optimista*

Este criterio es todo lo opuesto del anterior, consistente en *suponer* que la naturaleza presentará siempre el estado más favorable. La estrategia elegida será:

$$\underset{i}{\text{Máx.}} \left[\underset{j}{\text{Máx.}} \; R_{ij} \right] \tag{4}$$

2.5.4. *Criterio del optimismo parcial o de Hurwicz*

Es un criterio intermedio entre los dos anteriores. El optimismo (o pesimismo) del decisor se explicita y se introduce en el proceso de decisión.

Así, llamando:

α : Coeficiente de optimismo.

$(1-\alpha)$: Coeficiente de pesimismo.

R_i : El mayor elemento de la fila i.

r_i : El menor elemento de la fila i.

La estrategia elegida será:

$$\underset{i}{\text{Máx.}} \left[\alpha \, R_i + (1-\alpha) \, r_i \right] \tag{5}$$

Puede comprobarse que al hacer $\alpha = 0$ en [5] el criterio de Hurwicz coincide con el criterio pesimista o de Wald; por el contrario, al hacer $\alpha = 1$, coincide con el criterio optimista.

2.5.5. *Criterio de Savage*

L. J. Savage ha ideado un criterio fundado en lo que se puede perder de ganar por desconocer el estado que la naturaleza va a presentar. Dicha pérdida expresa el coste de la incertidumbre. El sujeto decisor tratará de minimizar lo más que se puede dejar de ganar.

A partir de la matriz de decisión (figura 3) se obtiene una nueva matriz —llamada matriz de "riesgos", de "perjuicios" o de "pesares"— cuyos elementos son:

$$r_{ij} = \underset{i}{\text{Máx.}} \; R_{ij} - R_{ij} \tag{6}$$

La estrategia elegida será:

$$\underset{i}{\text{Mín.}} \left[\underset{J}{\text{Máx.}}\ r_{ij} \right] \tag{7}$$

2.5.6. *Otros criterios y consideraciones críticas*

Una exposición altamente rigurosa y científica de los criterios anteriores puede verse en (16). Cabe imaginar otros criterios; los estudiados anteriormente son los más usuales.

Al utilizar estos criterios se produce una atribución implícita de probabilidades a los diferentes estados de la naturaleza, como vamos a comprobar con el ejemplo que a continuación presentamos. Cuando se trata de una decisión ante la incertidumbre, según M. K. Starr (17), "la única línea de acción racional consiste en tratar los diferentes estados de la naturaleza como igualmente probables".

EJEMPLO:

Sea el problema de decisión resumido en la siguiente matriz de pagos:

NATURALEZA

DECISOR	E_1	E_2	E_3
S_1	10	3	5
S_2	5	8	2
S_3	1	9	15
S_4	2	16	3

Fig. 4.- MATRIZ DE DECISION

(16) G. ARNÁIZ VELLANDO: *Introducción a la Estadística Teórica,* Editorial Lex Nova, Valladolid, 1965, págs. 769-800.
(17) M. K. STARR, *ob. cit.,* pág. 69.

La estrategia óptima, como puede comprobarse, es diferente según el criterio utilizado. En la figura 5 recogemos las líneas de acción a seguir con cada uno de los criterios.

CRITERIO	DECISION
— LAPLACE	S_3
— PESIMISTA	S_1
— OPTIMISTA	S_4
— OPTIMISMO PARCIAL (α = 0.10)	S_1
— SAVAGE	S_3

Fig. 5

En el criterio del optimismo parcial la decisión más conveniente depende del coeficiente de optimismo α En la figura 6 representamos el beneficio —los elementos de la matriz de pagos de la figura 4 son beneficios— en función de dicho coeficiente, o lo que es igual, la sensibilidad de la estrategia con relación al mismo.

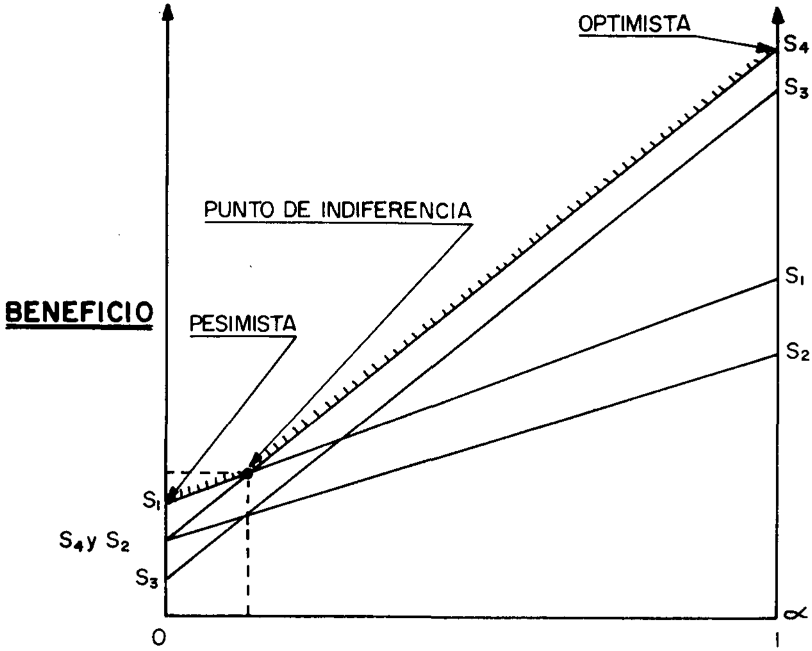


Fig. 6.- BENEFICIO EN FUNCION DEL COEFICIENTE DE OPTIMISMO (SENSIBILIDAD DE LA ESTRATEGIA CON RELACION AL COEFICIENTE DE OPTIMISMO).

Supongamos por un momento que nos encontramos frente a un universo aleatorio y no frente a uno indeterminado. En tal supuesto vamos a preguntarnos: ¿para qué valores de P_j, según el criterio de la esperanza matemática conviene elegir la estrategia S_1?. La respuesta se contiene en la figura 7.

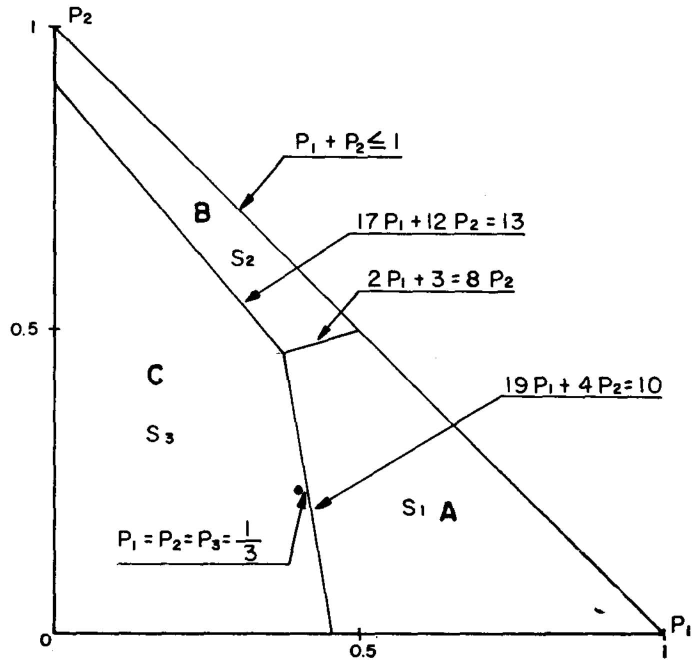


Fig. 7

Cuando las probabilidades P_1, P_2 y P_3 toman unos valores tales que definen un punto de la región A, la estrategia óptima es S_1 (igual que en el criterio pesimista). Si dichas probabilidades definen un punto de la región B, la estrategia óptima es S_2. Por último, si el punto cae en la región C, la estrategia es S_3 (igual que con los criterios de Laplace y Savage).

Está claro, pues, que la elección de uno u otro criterio de decisión ante la incertidumbre lleva implícita una atribución de probabilidades subjetivas a los diferentes estados de la naturaleza.

Estos criterios objetivos han sido propuestos por los teóricos de la decisión con la finalidad de evitar la subjetividad en el comportamiento del sujeto decisor. Sin embargo, cada uno de estos criterios, como acabamos de ver, lleva implícito un contenido subjetivo. "De ahí el que el centro de decisión se encuentre frente a un nuevo problema de elección: puesto que los criterios conducen a decisiones diferentes, va a ser preciso decidir ante todo "la manera de decidir". El único resultado logrado ha sido desplazar el problema de elección de un nivel a otro sin lograr resolverlo" (18).

El sujeto decisor realmente nunca se encuentra ante situaciones de total incertidumbre, la hipótesis de ignorancia total es tan irreal como la de información perfecta. Por ello, ante un universo indeterminado resulta imposible evitar la ponderación de los diferentes estados de la naturaleza. De ahí que en la actualidad se haya llegado a la conclusión de que en dichas situaciones, aparentemente de máxima incertidumbre, el mejor criterio de decisión es el de la esperanza matemática calculada utilizando las probabilidades "a priori" o probabilidades "subjetivas".

El concepto de probabilidad "a priori" o probabilidad "subjetiva", como afirma J. Hirshleifer (19), ha sido recientemente expuesto y desarrollado por L. J. Savage (20 - 21); sus antecedentes son, sin embargo, muy anteriores, como puede verse en la obra de H. Raiffa (22). La probabilidad de un suceso ya no es —tal como se ha entendido clásicamente— igual a la relación entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, tampoco es igual al límite de una frecuencia. La probabilidad subjetiva es un número con el que se cuantifica el concepto cualitativo de verosimilitud del sujeto decisor, la cual se apoya en su experiencia, en sus sentimientos, en su intuición o en cualquier otra información. Esta idea de probabilidad ha sido rehabilitada por los teóricos de la decisión estadística al mostrar su utilidad en la toma de decisiones económicas, ocupando un lugar muy destacado en esta línea la magistral obra R. O. Schlaifer: "Probability and Statistics for Business Decisions" (23).

La idea de probabilidad "subjetiva" o "a priori", junto con el Teorema de Bayes, ha dado origen al llamado "Análisis Bayesiano" que ha supuesto, en cierto modo, una revolución en la Teoría de la Decisión.

---

(18) J. J. LAMBIN, *ob. cit.*, pág. 232.

(19) J. HIRSHLEIFER: *The Bayesian Approach to Statistical Decisión,* en E. J. MOCK: *Financial Decision Making,* International Textbook Company, Pennsylvania, 1967.

(20) L. J. SAVAGE: *The Foundation of Statistics,* Wiley, Nueva York, 1954.

(21) L. J. SAVAGE: *Probability and the Weighing of Evidence,* Wiley, Londres, 1954.

(22) H. RAIFFA: *Decision Analysis,* Addison-Wesley, Massachusetts, 1968, páginas 273-277.

(23)—R. O. SCHLAIFER: *Probability and Statistics for Business Decisions,* MacGraw-Hill, Nueva York, 1959.

3. EL ANALISIS BAYESIANO

3.1. Concepto

Acabamos de ver en el apartado 2.5.6 que el criterio de la esperanza matemática calculada utilizando las probabilidades "a priori" o probabilidades "subjetivas" es el mejor criterio de decisión. Sin embargo, ante decisiones importantes el tomador de decisiones no puede conformarse sólo con su opinión "a priori", la realidad es muy compleja y en la mayoría de los casos aquélla resulta insuficiente. El sujeto decisor debe complementar su información "a priori" con la información "objetiva" obtenida experimentalmente, ello con la finalidad de eliminar incertidumbre y decidir con mayor garantía de éxito.

"Demostrar, como lo ha hecho Savage, que el criterio de la esperanza matemática calculada con la ayuda de las probabilidades basadas únicamente en una información "a priori" es un medio válido en el plano de la lógica y de la coherencia, no tiene por consecuencia el abandono por el centro de decisión de la dificultad que puede encerrar la búsqueda de una información objetiva" (24).

Más aún, generalmente las decisiones no se adoptan aisladamente, sino en cadena; por ello, en el transcurso del proceso de decisión puede surgir nueva información que aconseje rectificar la política inicialmente adoptada.

Todo esto nos lleva a preguntarnos: ¿Cómo fundir las dos fuentes de información, es decir, la información "a priori" o "subjetiva" y la información experimental u "objetiva"?

El Teorema de Bayes —de ahí la denominación de "Análisis Bayesiano"— nos permite resolver tan importante cuestión. Haciendo uso de las probabilidades "a priori" y de los resultados de la muestra obtenida experimentalmente, dicho teorema va a permitirnos obtener las probabilidades "revisadas" o "a posteriori".

Este importante teorema, formulado ya en el siglo XVIII por el reverendo Bayes, había caído casi en el olvido precisamente por requerir el uso de la probabilidad "subjetiva". Rehabilitada ésta por los teóricos de la decisión estadística, el Teorema de Bayes vuelve a tener una importancia extraordinaria.

Tanto el teorema de las probabilidades totales como el teorema de

(24) J. J. Lambin, *ob. cit.*, pág. 253.

las probabilidades compuestas nos permiten deducir la probabilidad de sucesos complejos partiendo de sucesos más elementales o simples. Sin embargo, con el Teorema de Bayes podemos proceder al revés, en lugar de buscar la probabilidad de las consecuencias buscaremos la probabilidad de las causas (ver 25).

Las probabilidades "a priori", como ya hemos visto, son grados de "suposición" o "confirmación", los cuales se apoyan, sin duda, en el análisis económico anterior. "Esta utilización del análisis económico para suministrar una distribución de probabilidad "a priori" es la característica distintiva del tratamiento bayesiano de los problemas de decisión" (26).

3.2. Teorema de Bayes.

Dado que este teorema es el elemento clave del moderno "análisis bayesiano", vamos a demostrarlo. Utilizaremos para ello, siguiendo a S. H. Hymans (27), el conocido diagrama denominado tradicionalmente "diagrama de Venn".

Así, sea el espacio fundamental S, sobre el cual existe una distribución de M sucesos disjuntos: $A_1, A_2, \ldots, A_M$, y sea H otro suceso tal que $H \subset S$. Esta situación se recoge en la figura siguiente.

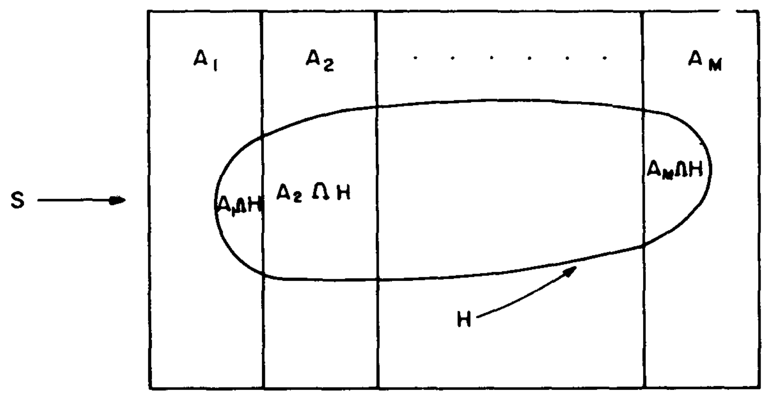


Fig. 8.- DIAGRAMA DE VENN

(25) J. J. Lambin, *ob. cit.*, págs. 260-261.

(26) S. H. Hymans: *Probabilités, économétrie et décision*, Dunod, París, 1969, página 295.

(27) S. H. Hymans, *ob. cit.*, pág. 290.

De la figura anterior se deduce que:

$$H = [A_1 \cap H] \cup [A_2 \cap H] \cup \cdots \cup [A_M \cap H] \tag{8}$$

de donde

$$P[H] = P[A_1 \cap H] + P[A_2 \cap H] + \cdots + P[A_M \cap H] \tag{9}$$

ya que se trata de sucesos disjuntos.

Siendo conocidas las probabilidades $P[A_i]$, $P[H]$ y $P[H A_i]$, lo que nos va a permitir determinar el teorema de Bayes es la probabilidad condicional $P[A_i \mid H]$

En virtud del teoremas de las probabilidades compuestas, tenemos que:

$$P[A_i \cap H = P[A_i]. \; P[H \mid A_i] = P[H]. \; P[A_i \mid H] \tag{10}$$

de donde

$$P[A_i \mid H] = \frac{P[A_i]. \; P[H \mid A_i]}{P[H]} \tag{11}$$

Introduciendo [10] en [9], podemos escribir:

$$P[H] = \sum_{i=1}^{M} P[A_i]. \; P[H \mid A_i] \tag{12}$$

Sustituyendo [12] en [11], tenemos que:

$$P[A_i \mid H] = \frac{P[A_i]. \; P[H \mid A_i]}{\sum_{i=1}^{M} P[A_i]. \; P[H \mid A_i]} \tag{13}$$

que es el teorema de Bayes.

En definitiva, si el suceso H depende de las causas $A_1, A_2, \ldots, A_M$, el teorema de Bayes nos permite determinar la probabilidad de que, dado el suceso H, sea la causa A_i la que lo haya originado. Las probabilidades $P[A_i \mid H]$ son las denominadas probabilidades "a posteriori" o "revisadas".

3.3. Resolución de un caso práctico.

3.3.1. *Planteamiento del problema.*

Para comprender mejor la problemática y el alcance del "análisis bayesiano", consideramos muy útil resolver un caso práctico.

Una empresa que se dedica a la fabricación de automóviles de turismo en un determinado país quiere lanzar al mercado un nuevo modelo no utilitario. El servicio de investigación comercial de dicha empresa, en virtud de estudios realizados para otros modelos con anterioridad y de otras experiencias, estima que, de los 800.000 clientes potenciales, la proporción de interesados oscilará entre el 15 y el 35 por 100. Su opinión acerca de la proporción de clientes interesados se resume en la siguiente tabla:

PROPORCION DE CONSUMIDORES INTERESADOS (P)	VEROSIMILITUD DE CADA POSIBLE VALOR DE (P)
< 15%	0%
15%	10%
20%	45%
25%	20%
30%	15%
35%	10%
>35%	0%

Fig. 9

Después de haber realizado los estudios económicos pertinentes, se llega a la conclusión de que sólo interesará lanzar el nuevo modelo si la proporción de clientes interesados es igual o superior al 25 por 100; si sólo fuera del 15 por 100, la empresa perdería 200.000 unidades monetarias, y fuera del 20 por 100, perdería 100.000.

Llamando:

S_1 : decisión consistente en lanzar el nuevo producto.
S_2 : decisión consistente en no lanzarlo.
p_i : proporción de clientes interesados (estado de la naturaleza).
P_i : probabilidad "subjetiva" o "a priori" de p_i.

El problema anterior lo resumimos en la siguiente tabla de resultados, también llamada, como ya hemos visto, matriz de decisión o matriz de pagos.

	P = 0.10	P = 0.45	P = 0.20	P = 0.15	P = 0.10
	P = 0.15	P = 0.20	P = 0.25	P = 0.30	P = 0.35
S_1	- 200.000	- 100.000	10.000	150.000	300.000
S_1	0	0	0	0	0

Fig. 10

3.3.2. *Decisión utilizando solamente la información "a priori".*

Aplicando el criterio de la esperanza matemática resulta que:

$$E[S_1] = -10.500$$
$$E[S_2] = 0$$

En el estado actual de la información, a la empresa no le interesa lanzar el nuevo producto.

3.3.3. *Decisión con información perfecta.*

Si la empresa supiera que la proporción de interesados es de 0,15 ó 0,20 no lanzaría el nuevo producto, en cualquier otro caso sí lo lanzaría.

La matriz de decisión de la figura 10 quedaría ahora así:

	P = 0.10	P = 0.45	P = 0.20	P = 0.15	P = 0.10
	P = 0.15	P = 0.20	P = 0.25	P = 0.30	P = 0.35
S_1	0	0	10.000	150.000	300.000
S_2	0	0	0	0	0

Fig. 11

Aplicando el criterio de la esperanza matemática tenemos que:

$$E' [S_1] = 54.500$$
$$E' [S_2] = 0$$

La diferencia entre la ganancia esperada cuando la información es perfecta y la ganancia esperada en la incertidumbre nos da el valor de la información perfecta o lo que es igual, el coste de la incertidumbre. Dicha diferencia es:

$$V_{ip} = E' [S_1] - E [S_2] = 54.500$$

La utilidad de V_{ip} es doble: a) por una parte, le indica al tomador de decisiones lo que pierde de ganar si no complementa la información; b) por otra, constituye un límite superior del coste a realizar para obtener más información.

Para más detalles sobre el valor de la información perfecta y los caminos existentes para calcularlo consúltese (28).

(28) H. RAIFFA, *ob. cit.*, págs. 27-30.

3.3.4. *Realización de un muestreo aleatorio.*

Supóngase que se ha extraído una muestra de n (= 20) clientes potenciales y sea X (= 7) el número de clientes interesados en adquirir el nuevo modelo de automóvil. Como p es la proporción de interesados en la población total, la probabilidad de que un cliente elegido al azar esté interesado es p y la probabilidad de que no lo esté será q = 1 — p.

Si suponemos, por comodidad, que el muestreo se ha hecho con reemplazamiento, la variable aleatoria X seguirá la ley binomial:

$$X \longrightarrow B\ (n,\ p) \qquad [14]$$

es decir

$$P\ [X = x] = \binom{n}{x} p^x\, q^{n-x} \qquad [15]$$

Según la distribución de probabilidad "a priori", los posibles valores de p son 0,15, 0,20, 0,25, 0,30 y 0,35. Calcularemos ahora las probabili-

P	P [P] "A PRIORI"	P [X = 7 / P]
0.15	0.10	0.016
0.20	0.45	0.054
0.25	0.20	0.112
0.30	0.15	0.164
0.35	0.10	0.184
	1.00	

Fig. 12

dades condicionadas $P[X = 7 \mid p]$, es decir, la probabilidad de que $X = 7$ para cada posible valor de p. Dichas probabilidades se calcularán aplicando la fórmula:

$$P[X = 7 \mid p] = \binom{20}{7} p^7 q^{13} \qquad [16]$$

Estas probabilidades condicionadas son necesarias para poder aplicar el teorema de Bayes y calcular las probabilidades "a posteriori". Tales probabilidades se recogen en la figura 13.

3.3.5. *Cálculo de las probabilidades "a posteriori".*

Aplicando el teorema de Bayes obtenemos las probabilidades "a posteriori" o "revisadas". Estas probabilidades son el producto de las dos fuentes de información, la información "a priori" y el resultado de la muestra. Se calcularán aplicando la fórmula:

$$P[p \mid X = 7] = \frac{P[p] \cdot P[X = 7 \mid p]}{P[X = 7]} \qquad [17]$$

en donde

$$P[X = 7] = \sum_{p} P[p] \cdot P[X = 7 \mid p] \qquad [18]$$

Estas probabilidades se recogen en la siguiente tabla:

P	PROBABILIDADES "A PRIORI"	PROBABILIDADES "A POSTERIORI"
0.15	0.10	0.017
0.20	0.45	0.266
0.25	0.20	0.245
0.30	0.15	0.269
0.35	0.10	0.203
	1.00	1.000

Fig. 13

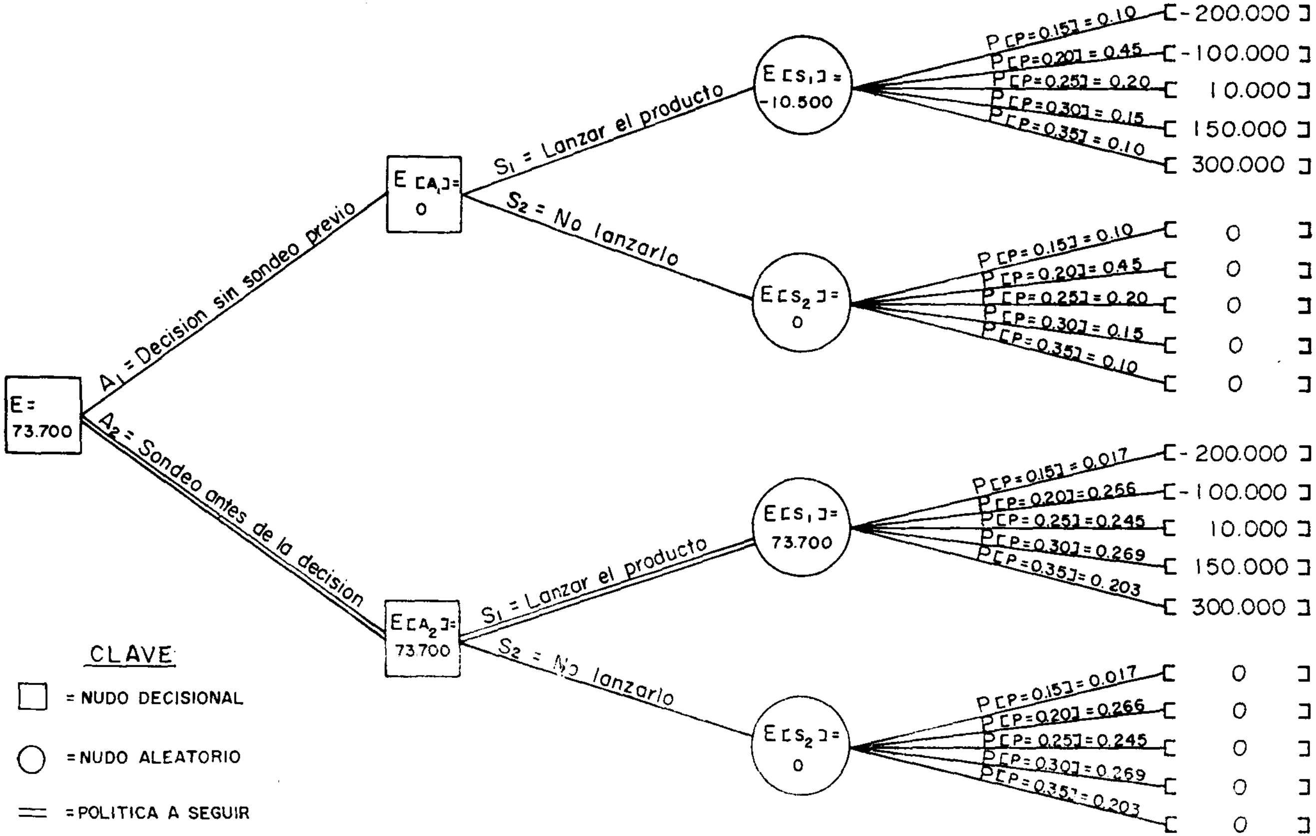
3.3.6. *Decisión después de la muestra.*

La matriz de decisión, utilizando ya las nuevas probabilidades, será ahora:

	P = 0.017	P = 0.266	P = 0.245	P = 0.269	P = 0.203
	P = 0.15	P = 0.20	P = 0.25	P = 0.30	P = 0.35
S_1	-200.000	-100.000	10.000	150.000	300.000
S_2	0	0	0	0	0

Fig. 14

Fig.15.- ARBOL DE DECISION



Aplicando el criterio de la esperanza matemática tenemos que:

$$E\ [S_1] = 73.700$$
$$E\ [S_2] = 0$$

A la empresa le interesa, pues, lanzar el nuevo modelo de automóvil. Dado el reducido tomado de la muestra, hemos prescindido del coste de la misma. En cualquier caso, su inclusión no invalidará nuestro razonamiento, habría que restar dicho coste de la esperanza matemática de beneficio.

3.3.7. *Arbol de decisión.*

Todas las alternativas y conclusiones expuestas anteriormente podemos ordenarlas en un árbol o diagrama de flujos de decisión, que tiene un enorme valor como instrumento en la toma de decisiones. "El árbol de decisión puede aclararle a la dirección, de una forma que no puede hacer ningún otro instrumento que conozca, las elecciones, riesgos, objetivos, gananciales monetarias y necesidades de información comprendidas en un problema de decisión. Se hablará mucho de árboles de decisión en los años venideros. Aunque constituyen una novedad para la mayoría de los hombres de negocios hoy en día, serán seguramente usuales en el lenguaje de los directivos dentro de pocos años" (29).

3.3.8. *El tamaño de la muestra.*

Es ésta una importante cuestión del "análisis bayesiano".

El tamaño óptimo de la muestra será aquel valor de n que haga máximo el valor de la esperanza matemática E $[S_i]$. Así, representando gráficamente E $[S_i]$ en función de n, tenemos que:

(29) J. F. MAGEE: *Decision Trees for Decision Making*, "Harvard Business Review", julio-agosto, 1964, págs. 126-138.

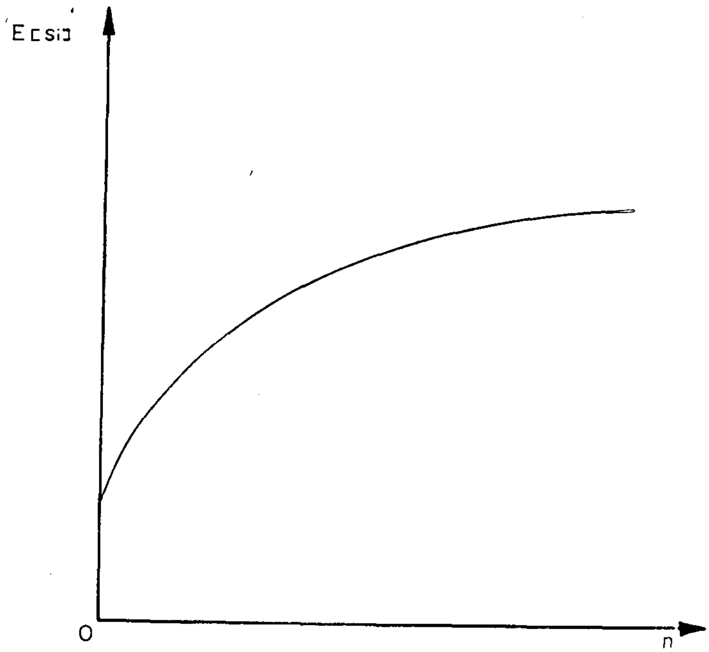


Fig. 16

Por otra parte, el coste de muestra C_M en función de *n* presenta normalmente el siguiente desenvolvimiento:

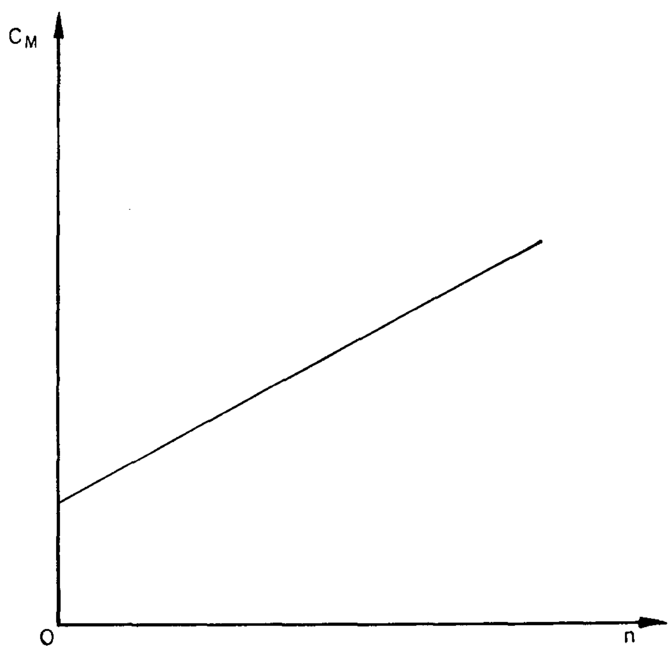


Fig. 17

Considerando conjuntamente las figuras 16 y 17 tenemos que:

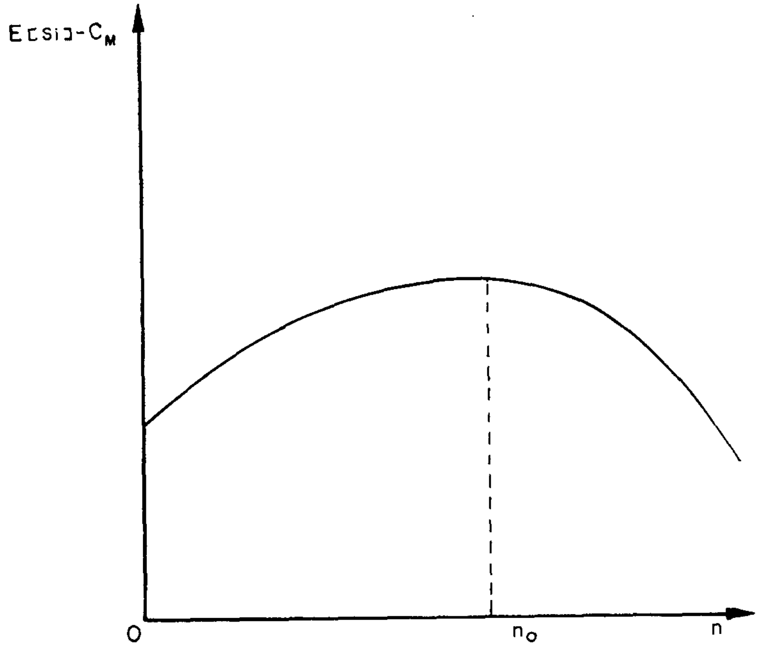


Fig. 18

El tamaño óptimo de la muestra es, pues, n = no.

El problema de la determinación del tamaño de la muestra puede resolverse utilizando la propia estructura del proceso decisional. Frente a la alternativa de decidir sin sondeo previo, existirán las alternativas de decidir realizando unos sondeos previos de tamaño n_1, n_2, ..., n_K. El árbol de decisión presentará ahora la siguiente estructura (véase fig. 19).

Indudablemente, la resolución del problema por aproximaciones sucesivas, utilizando los resultados experimentales, tiene un interés bastante limitado. Debe abordarse utilizando la información "a priori", antes de acudir a la experimentación. El teorema de Bayes permite afrontar esta importante cuestión, de la misma forma que hace posible decidir si conviene o no realizar un muestreo antes de lanzar un nuevo producto (ver (30). Además de preguntarnos si conviene hacer un muestreo antes de decidir, podemos preguntarnos de qué tamaño debe ser aquél.

(30) J. J. LAMBIN, *ob. cit.*, págs. 324-332.

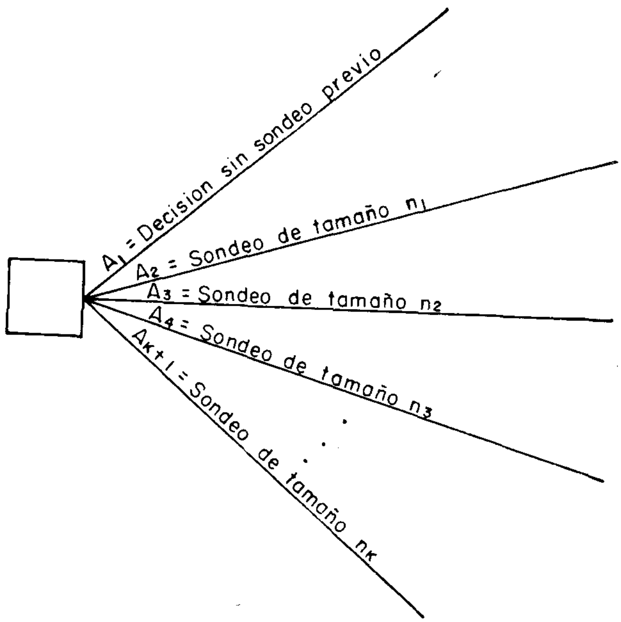


Fig. 19

En cualquier caso, la determinación del tamaño óptimo de la muestra es uno de los aspectos del "análisis bayesiano" que más complicaciones presenta (para mayor detalle, ver (31)).

3.4. OTRAS APLICACIONES.

En los últimos diez años se han publicado bastantes trabajos en los que se muestran las posibles aplicaciones del "análisis bayesiano".

Sin duda alguna, en el campo de la investigación de mercados (como ya hemos visto con el caso práctico resuelto), el "análisis bayesiano" es de extraordinaria utilidad (ver (32) y (33)).

---

(31) H. RAIFFA, *ob. cit.*, págs. 157-181.
(32) "Revue Française du Marketing", núm. 29, cuarto trimestre, 1968, páginas 23-33.
(33) MUHAMMAD NAQI: *Analysis of a Bayesian Decision Model for Test Marketing,* "Journal of the Canadian Operational Research Sociey", vol. 32, núm. 2, 1970, págs. 140-146.

Se ha aplicado también con éxito al control de calidad (ver (34) y (35)), a la gestión de "stocks" (ver (36) y (37)), etc.

En general, se aplica esta nueva metodología en todos los problemas de decisión en los que la información de partida resulta insuficiente.

3.5. CONSIDERACIONES FINALES.

El modelo bayesiano, al terner en cuenta explícitamente la información "a priori", supone un perfeccionamiento con respecto a los modelos clásicos.

Por otra parte, los modelos clásicos no tienen más que un solo nivel de experimentación, lo que no ocurre con el modelo bayesiano. "Después de cada experimentación se adquiere una información adicional que refuerza nuestros conocimientos anteriores. La distribución "a priori" de los parámetros del modelo se transforma en distribución "a posteriori", es decir. en una distribución revisada y corregida a la luz de los resultados de la experimentación. Esta nueva distribución puede ser considerada como otra distribución "a priori" para el ciclo siguiente de experimentación y análisis. Este proceso se puede detener al final de cualquier ciclo" (38).

El modelo bayesiano es, pues, de naturaleza secuencial y se ajusta muy bien a la peculiar evolución de la propia realidad económica.

---

(34) KREVELD, A. VON: *Enfoque bayesiano de un problema de control de calidad,* "Cuadernos de Estadística Aplicada e Investigación Operativa", vol. VI, fascículo 3, 1969, págs. 233-239.

(35) M. HAMBURG: *La teoría Bayesiana de la decisión y el control estadístico de la calidad,* "Cuadernos de Estadística Aplicada e Investigación Operativa", volumen II, fasc. 4, 1963, págs. 281-293.

(36) S. ZACKS: *Bayes Sequential Design of Stock Levels,* "Naval Research Logistics Quartely", vol. 16, núm. 2, 1969, págs. 143-157.

(37) D. G. GOHEN: *Ajuste bayesiano de las previsiones de ventas en los sistemas de gestión de "stocks" de varios articulos,* "Cuadernos de Estadística Aplicada e Investigación Operativa", vol. V, fasc. 1, 1968, págs. 25-41.

(38) J. DONIO: *Le problème bayésien: Présentation générale,* "METRA", volumen VIII, núm. 2, 1969, págs. 167-185.