Una nueva frontera en el análisis de inversiones

MANUEL T. SANABRIA GOMEZ
Economista

1. INTRODUCCION

La elección de las inversiones se ha convertido en uno de los grandes problemas del actual mundo económico, concerniendo tanto al Estado y sus planificadores como a los dirigentes de empresa.

En toda situación donde el dinero esté disponible y donde las necesidades deban ser satisfechas, aparece el problema de la asignación de los recursos económicos.

La inversión es, para la empresa, la condición "sine qua non" de su supervivencia y de su desarrollo: una empresa que no invierte está condenada antes o después al ocaso. Es su "razón de ser", pues no puede haber empresa sin inversión.

Por su valor estratégico la inversión aporta a la empresa diversos triunfos: un producto competitivo, un mercado interesante, una imagen de marca, una posición dominante, un prestigio, etc. Por su aspecto financiero genera unas rentas sobre las que se la juzga y gracias a las cuales puede vivir. La inversión debe, por tanto, elegirse siguiendo estos dos criterios de valor estratégico y de rentabilidad. El aspecto estratégico es difícilmente cuantificable: es a menudo una hipótesis, una previsión, una apuesta sobre el porvenir, que flotando por encima de todo el sentido de los negocios, se traduce en el "olfato" del inversor. El aspecto financiero es más fácilmente mensurable y por lo mismo factible de aplicación de métodos cuantitativos. Por ello, y derivado de su importancia para la empresa, es uno de los campos de la Gestión Financiera sobre el que los especialistas en Dirección han profundizado más en sus investigaciones.

El problema no es fácil; en efecto, no se limita a la sola estimación de los ingresos esperados, sino que hace llamada a nociones más complejas, tales como la determinación del coste del capital de la empresa, las relaciones firma-mercado financiero, la política adoptada por la empresa cara a sus accionistas, etc.

La determinación del valor financiero, de la rentabilidad de un proyecto de inversión es una ciencia nueva, pero ya muy desarrollada.

El lector familiarizado con las técnicas recientes de Análisis Financiero conocerá sin duda el método llamado del "Período de Recuperación" ("Pay-back"), y el del "Valor Neto Actualizado" ("Valor Capital"), fundamentados sobre la noción de "cash-flow" generado por una inversión. Estos dos métodos, por citar los más conocidos, permiten (con una fiabilidad que depende evidentemente de la calidad de las previsiones efectuadas sobre el proyecto), determinar si un proyecto de inversión debe o no ser aceptado, o si un proyecto es preferible a otro y en qué condiciones. El método del Valor Capital (N. P. V. o V. A. N.), por ejemplo, permite a una empresa que dispone de varias posibilidades de inversión, clasificarlas en función del V. A. N. respectivo y escoger ésta o éstas que ofrecieran mayor montante de Valor Capital.

Situémonos ahora en el contexto que nos ocupa y que está lejos de ser el menos frecuente: el de la empresa en que los presupuestos de inversión están limitados de forma imperativa.

Las causas de esta limitación de recursos disponibles para invertir, sobre las que profundizaremos más adelante, son diversas: imposibilidad para la empresa de recurrir al empréstito, insuficiencia de créditos concedidos, o bien por una empresa filial de otra, limitación impuesta por la sociedad matriz.

La selección de los proyectos de inversión se traduce en investigar la asignación óptima de los recursos disponibles: ¿cómo repartirá la empresa sus disponibilidades para que el programa de inversión escogido ofrezca la rentabilidad más alta posible? El método del Valor Neto Actualizado (o cualquier otro) resulta evidentemente válido; ello permite clasificar los diferentes proyectos según su rentabilidad previsional. Pero el problema de selección en sí mismo no estará solucionado.

Ciertamente, las formas de resolverlo vienen fácilmente a la mente; sería posible, por ejemplo, clasificar los proyectos de inversión por orden de rentabilidad decreciente: elegir la realización del primero, afectar las disponibilidades financieras restantes al segundo proyecto, después al tercero, y así sucesivamente, hasta el agotamiento de los recursos. El programa de inversiones así obtenido ofrecerá sin duda una rentabilidad relativamente elevada, pero nada nos permitiría afirmar que fuera el programa que ofreciera la rentabilidad máxima. (Puede verse al respecto en Albach lo que él denomina "estrategia de espera" y "estrategia de los dos mejores.) La elección óptima no puede alcanzarse porque el procedimiento seguido no es homogéneo (cálculo de la tasa de rentabilidad seguido de la afectación de los recursos). El cálculo de la rentabilidad se hace, en efecto, de forma independiente para cada proyecto, y aboca en un resultado que es función simultáneamente del coste de la inversión y de su rendimiento. La fase siguiente (afectación de recursos) se hace únicamente siguiendo el criterio del rendimiento. Para permitir la elección óptima, el procedimiento a seguir debe ser homogéneo en todas sus fases y no disociar, para el conjunto de los proyectos de inversión, su aspecto "consumo de recursos" de su aspecto "creación de riqueza".

El sistema a poner en práctica debe, pues, tratar simultáneamente el conjunto de datos que conciernan a la cartera de proyectos; debe permitir optimizar la rentabilidad del programa de inversiones, al nivel escogido por la dirección de la empresa, respecto a las restricciones de limitación presupuestaria y a cualquier otra restricción no financiera.

La aproximación con las técnicas de Programación Lineal se hace rápidamente: la Programación Lineal es un método algébrico que permite optimizar una función lineal de varias variables sometidas a un conjunto de restricciones igualmente lineales. Ello permitirá, al menos en teoría, solucionar el problema de la elección óptima de las inversiones, a condición que podamos expresar el o los objetivos a optimizar (beneficios brutos, rentabilidad al nivel escogida), y las restricciones presupuestarias y no financieras, bajo forma de funciones lineales. Aunque, actualmente, se han dado tratamientos a este problema en los que la linealidad ha sido superada, e igualmente se ha ampliado el problema a situaciones de incertidumbre. En este último punto radica la principal dificultad de toda modelización. La traducción de las realidades económicas a ecuaciones algebraicas es siempre una aproximación delicada, y es raro que una formulación matemática, por muy exhaustiva y profunda que sea, pueda reflejar la complejidad y el carácter altamente aleatorio de los problemas del mundo económico.

Pero toda la ambición de este artículo es la de mostrar que un esquema tal, a pesar de sus imperfecciones y de la rigidez que le impone el empleo del instrumental matemático, pero beneficiándose de las inmensas posibilidades ofrecidas por los ordenadores, puede, válidamente, ayudar al inversor en su toma de decisiones.

2. EL METODO DEL VALOR NETO ACTUALIZADO

La selección basada en el procedimiento de los Valores Netos Actualizados (V. A. N.) —"Net Present Value" (N. P. V.) o Valor Capital— es aconsejada como criterio de decisión por Fisher, Schneider, Keynes, Hicks, Samuelson y Massé.

El Valor Capital, concepto acuñado por Irving Fisher y Erich Schneider, aunque con diferencia de matices, es la renta neta actualizada a un mismo momento cronológico de una inversión, descontado el desembolso inicial, según Schneider.

Considerando que en toda inversión se origina un doble flujo monetario, de sentido opuesto, que se extiende a lo largo de la vida de la misma y aplicando la regla del interés compuesto (ley exponencial), el Valor Capital de una inversión (la suponemos instantánea para simplificar los razonamientos posteriores), que supone un desembolso inicial I y que renta R_j en el año j, a partir de ahora hasta el año n (R_j = ingresos del año j — gastos del año j), será:

$$V = -I + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{R_j}{(1+i)^j}.$$

Ahora bien, el valor V de comparación de rentas o capitales situados en distintos momentos del tiempo, se fundamenta en dos conceptos de importancia clave: la tasa de actualización i y la ley de actualización $\frac{1}{(1+i)^j}$ (interéscompuesto).

¿Qué tasa de actualización, i, hemos de tomar al actualizar el valor de una inversión? Sencillamene aquella a la que suponemos pueda invertirse alternativamente; por tanto, la fórmula, con carácter de generalidad, será:

$$V = -I + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{R_j}{\prod_{K=1}^{K=j} (1+i_k)}.$$

A efectos operativos diremos que el Método del Valor Neto Actualizado (V. A. N.) consiste, conocida la tasa de actualización, en descontar (actualizar) la serie de diferencias entre cobros y pagos al momento cero. Representamos por P_{nj} el pago realizado a causa de la inversión genérica h en el momento genérico j, y C_{hj} el cobro producido por el empleo de la inversión h en el momento j. Como resultado del análisis tendremos que comparar entre sí los valores:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(C_{1j} - P_{1j})}{(1+i)^j} = V_1$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(C_{2j} - P_{2j})}{(1+i)^j} = V_2$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(C_{hj} - P_{hj})}{(1+i)^j} = V_h$$

Elección: $\underset{K}{\text{Máx}}\ V_k$

La inversión que proporcione el mayor Valor Neto Actualizado, máximo V_k, será elegida como la más interesante.

3. SITUACION DE LIMITACION DEL PRESUPUESTO DE INVERSIONES

En principio, la selección de inversiones se lleva a cabo según un proceso muy simplista: Los capitales a disposición de la empresa se suponen ilimitados o, al menos, susceptibles de obtenerse sin dificultad. De esta forma, todos los proyectos donde la Tasa Interna de Rentabilidad es superior al Coste del Capital o cuyo Valor Actual Neto sea positivo, según el criterio de selección adoptado, merecen seleccionarse. Esta manera de proceder, poco realista, hace abstracción, tal como intentaremos exponer, de parte del mecanismo financiero de la decisión de invertir.

Es muy corriente, incluso en empresas de gran envergadura, que la selección de proyectos se realice en situación de "racionamiento o limitación de capital"; es decir, que los fondos susceptibles de invertirse durante un período de tiempo dado sean limitados a un cierto importe. Tal situación puede resultar de una decisión voluntariamente adoptada por la dirección de la empresa: "Limitación interna del capital". O bien, puede ser impuesta a la empresa por factores que le son externos; en cuyo caso, se trata de "Limitación externa de capital".

3.1. Limitación interna de capital

Tal restricción prevalece particularmente en las empresas que tienden a adoptar su política de inversiones al producto de la autofinanciación; este caso, frecuente en la práctica, indica por parte de los dirigentes a la vez que una marcada repulsa por los riesgos inherentes a todo endeudamiento, su deseo de conservar un control estrecho sobre la empresa.

La política de dividendos llevada a cabo por una sociedad puede limitar los fondos destinados a la inversión. En el caso de una baja en los beneficios, la empresa forzada, o deseosa, de ofrecer a sus accionistas unos dividendos al menos iguales a los de años precedentes, puede llegar a la situación de diferir la realización de ciertos proyectos, aun teniendo una rentabilidad interesante.

Sucede a veces el caso de que un crecimiento demasiado rápido puede obligar a una empresa a frenar el ritmo de sus inversiones. Puede hacerse necesario reforzar puntos débiles en el entorno financiero e incluso regular la tasa de expansión; ello, teniendo en cuenta ciertas fuerzas o restricciones que pesen sobre la empresa, tales como escasez de mano de obra cualificada, o bien de cuadros directivos para encabezar los diferentes proyectos, dificultad en asegurarse aprovisionamientos de forma regular, controlar su gestión de "stocks", etc., puede llegar a repercutir aún con más peso en limitar su Política de Inversiones.

3.2. Limitación externa de capital

Los condicionantes externos pueden igualmente incidir en las decisiones de inversión, en la medida en que no todas las empresas tienen las mismas posibilidades de acceso al mercado de capitales. El postulado de que "siempre se encuentra dinero para un buen proyecto de inversión", puede adquirir matices muy variados según la empresa que pretenda acogerse al mismo.

Por otro lado, los costes imperantes en el mercado de capitales afectan en gran medida a las inversiones. En épocas de "dinero caro", las empresas pueden, a fin de no hipotecar su futuro, limitar su endeudamiento dentro de ciertos límites razonables. De esta forma, en determinados períodos en el curso de los últimos años, caracterizados por la escalada de las tasas de interés en el mundo, no pocas empresas han diferido parte de sus proyectos de inversión a fin de no comprometer su equilibrio financiero.

Junto con los factores coyunturales, están los de concurrencia y competencia no carentes de importancia a la hora de la decisión de invertir. Algunas empresas prefieren limitar sus compromisos si tienen conciencia de que un esfuerzo sería anulado, quizás fácilmente, por la acción de sus competidores y como alternativa reinvertir las sumas así liberadas en otros sectores.

Vemos, pues, que en la vida de los negocios la situación de racionamiento de capital, en mayor o menos grado, es bastante frecuente; debido a ello han de tenerse en cuenta nuevos métodos de selección de inversiones susceptibles de ser utilizados en tales circunstancias. En los casos más sencillos, los criterios tradicionales, aplicados de forma coherente, dan soluciones generalmente satisfactorias, pero sólo las "técnicas matemáticas de extremos" llevan a una selección óptima de las inversiones.

A fin de seleccionar proyectos de inversión en situación de limitación de capital a lo largo de varios períodos, se han desarrollado en los últimos años diferentes modelos matemáticos, teniendo todos ellos como denominador común las técnicas de Análisis Financiero, de Investigación Operativa y de utilización de ordenadores. Una de las aproximaciones claves, y de las pioneras en este campo, es la elaborada por el americano H. Martin Weingartner, en su obra "Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems".

4. LOS TRABAJOS DE WEINGARTNER

Las ideas de Weingartner derivan de un problema expuesto por Lorie y Savage. Este problema tiene como datos:

— La existencia de varios proyectos de inversión.

— Para cada uno de los proyectos, el valor de sus "cash-flows" esperados y el montante de salidas de fondos que ocasionarán.

— Los fondos disponibles para la inversión.

Veamos cuál sería el razonamiento en un hipotético caso y sin adentrarnos en el uso de la Programación Matemática.

Supongamos que una empresa considera para el próximo año los siguientes proyectos de inversión, independientes entre sí e indivisibles:

Proyectos	*Capital invertido*	*Valor actual neto (al 10 %)*
I_1	1.000.000	100.000
I_2	1.000.000	90.000
I_3	1.000.000	60.000
I_4	2.000.000	20.000
I_5	3.000.000	400.000
I_6	4.000.000	110.000
I_7	5.000.000	520.000

Dicha empresa, que se guía por el Criterio del Valor Neto Actualizado a fin de clasificar sus inversiones, tiene limitado su presupuesto anual de inversiones para el próximo ejercicio a la cifra de 5.000.000 de pesetas.

La empresa se enfrenta al problema de elegir entre el conjunto de los siete proyectos aquel subconjunto que, no superando 5.000.000 de pesetas, sea susceptible de producir el mayor Valor Actual Neto. Con este fin establecemos todas las combinaciones posibles de los siete proyectos respetando el citado tope presupuestario.

Proyectos seleccionados	*Valor actual neto correspondiente*
I_1, I_2, I_3, I_4	270.000
I_1, I_2, I_5	590.000
I_2, I_3, I_5	550.000
I_1, I_3, I_5	560.000
I_4, I_5	420.000
I_1, I_6	210.000
I_2, I_6	200.000
I_3, I_6	170.000
I_7	520.000

Teniendo en cuenta el techo presupuestario de los cinco millones de pesetas, la elección de los proyectos I_1, I_2, I_5 aporta el valor actual neto más elevado, con una cuantía de 590.000 pesetas.

Supongamos a continuación que la empresa se enfrenta al mismo problema de decisión relativo a la política de inversiones a efectuar en el curso del próximo ejercicio y que además prevalezcan las siguientes hipótesis:

— Los proyectos I_2, I_5, I_7 son mutuamente excluyentes.

— La aceptación del proyecto I_3 está vinculada a la aceptación del I_1.

La selección se presenta en la forma:

Proyectos seleccionados	*Valor actual neto correspondiente*
I_1, I_2, I_3, I_4	270.000
I_1, I_3, I_5	560.000
I_4, I_5	420.000
I_1, I_6	210.000
I_2, I_6	200.000
I_7	520.000

En este caso, la elección se centra en los proyectos I_1, I_3 e I_5 que contribuyen con 560.000 pesetas al objetivo de beneficio de la empresa.

En el sencillo caso expuesto, la restricción financiera de los cinco millones de pesetas, según dijimos, tiene vigencia a lo largo de un año; ello se revela como artificial, al darse el caso de que numerosos gastos relacionados con dicha inversión se reparten sobre varios períodos anuales. Por otro lado, los presupuestos no pueden concebirse sin una cierta flexibilidad, que permita determinadas adaptaciones en el escalonamiento de la decisión de invertir.

Una política de inversiones rigurosa y clara debe superar un cuadro de análisis anual muy estricto y sin olvidar la premisa de que las decisiones de inversión se elaboran y realizan según un proceso continuo: Las del año actual condicionan y determinan las del año próximo, y así sucesivamente.

Efectuando un análisis a lo largo de varios períodos, los proyectos de inversión pueden diferirse y adaptarse de forma que ciertas oportunidades no sean desaprovechadas por las limitaciones presupuestarias.

Por otro lado, las decisiones de inversión del momento presente, en la mayoría de los casos, generarán caja a lo largo del tiempo, lo que influirá sobre el nivel de disponibilidades repercutiendo ello en las inversiones futuras. Estos flujos de tesorería pueden levantar, parcialmente o en su totalidad, la hipótesis de limitación de capital que prevalecía inicial-mente. Por tanto, vemos que sólo una proyección sobre varios períodos permite tener en cuenta las posibles consecuencias de las decisiones actuales.

Weingartner llegó, en sucesivas etapas, a la conclusión de que sólo las técnicas de Programación Matemática permiten construir un modelo que englobe todos los datos del problema. La dificultad consiste en formar una función objetiva a optimizar que refleje correctamente los fines perseguidos e, igualmente, un sistema de restricciones que traduzca lo más fielmente posible el contexto financiero del problema.

Weingartner, a fin de permitir la maximización del valor actual neto (V. A. N.) de un conjunto de proyectos de inversión en situación de racionamiento de capital durante varios años, llega a la formulación siguiente:

MODELO DE WEINGARTNER

$$\text{Máx.} \quad Z = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{T} \frac{C_{ij}}{(1+k)^j} X_i$$

restricciones

$$\sum_{i}^{n} A_{ij} \cdot X_i \leq M_j \,; \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, T)$$

$$0 \leq X_i \leq 1; \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n)$$

siendo:

T = Número de períodos sobre el que se escalona el programa de inversión.

n = Número de proyectos de inversión.

C_{ij} = Caja generada ("cash-flow") esperado para el proyecto i en el período j.

A_{ij} = Salida de fondos ocasionada por el proyecto i en el período j.

k = Tasa de actualización de los "cash-flow".

M_j = Presupuesto de la inversión en el período j.

X_i = Variable del problema (incógnitas), en número igual al de proyectos de inversión, permitiendo interpretar los resultados del problema. Según que los proyectos de inversión sean considerados como fraccionables o no, las X_i indicarán bien el porcentaje que debe realizarse del proyecto i, bien si el proyecto debe realizarse o abandonarse.

El significado y alcance del modelo lo veremos a continuación:

La función objetivo elegida por Weingartner se obtiene calculando, para cada Proyecto de inversión, el valor presente de sus "cash-flows" esperados, actualizados a una cierta tasa apta para reflejar el escalonamiento en el tiempo de las entradas de fondos esperadas. De esta forma obtenemos un coeficiente de la función objetivo para cada proyecto, $\sum_{j=1}^{T} C_{ij}(1+k)^{-j}$ y la misma función como suma de estos coeficientes, representaría el "cash-flow" actualizado que puede conseguirse con el programa de inversiones.

A continuación definiremos las variables X_i de la función objetivo. Estas variables pueden tomar bien los valores cero o uno, bien todo valor comprendido entre cero y uno, según sea la naturaleza del problema. Estas X_i son los términos que vamos a multiplicar por los coeficientes antes definidos (suma actualizada de los "cash-flows" de cada proyecto). Si suponemos han de ser realizados por entero o bien abandonados, impondremos a las X_i bien el valor cero (abandonado del proyecto), bien el valor uno (realización). Si, por el contrario, los proyectos son considerados como fraccionables y pueden realizarse en cualquier porcentaje, se dejará a las X_i variar libremente entre cero y uno, indicando la cifra que aparezca en la solución el porcentaje del proyecto considerado que deberá realizarse.

Como tipo de inversión fraccionable, y a título de ejemplo, citaremos el caso de los valores mobiliarios. Por otro lado y ciertamente la mayor parte de las inversiones de tipo industrial (compra de equipo, construcción de fábricas, etc.) deben considerarse como no fraccionables. Esta distinción, importante a nivel de resolución del programa lineal (las técnicas de solución son diferentes), carece de consecuencia a la hora de la construcción del programa lineal (es suficiente determinar mediante un juego de restricciones apropiadas el margen de variación de las X_i).

Hacemos notar que si los proyectos son considerados como fraccionables, el modelo implica que los "cash-flows" generados y las salidas de fondos ocasionados por cada cada proyecto sean directamente proporcionales al porcentaje de realización de cada proyecto. Esto será cierto, por ejemplo, para una inversión del tipo de participación en el capital de un negocio, donde las salidas de fondos son en gran medida proporcionales a la parte del capital adquirido, y donde los ingresos esperados son función directa de dicha parte.

Por otro lado, y como hipótesis de base de este modelo, se considera a los proyectos como independientes financieramente; es decir, el hecho de que un proyecto sea aceptado o rechazado no tiene ninguna influencia sobre las características financieras de los restantes proyectos.

Las restricciones establecidas por Weingartner en su modelo son de dos tipos. Nos encontramos en primer lugar las que expresan la limitación de recursos disponibles, y a continuación las que definen el dominio o campo de variación de las X_i.

El primer tipo de restricciones, designadas como restricciones presupuestarias, vienen dadas en un número igual al de períodos sobre el que se prevén salidas de fondos. Expresando las mismas, para cada período, que la suma de salidas de fondos ocasionadas por la adopción de los diferentes proyectos no debe exceder el montante de recursos disponibles para dicho período.

Las restricciones del segundo tipo vienen dadas en número igual al de proyectos de inversión, adoptando la forma general

$$0 \leq X_i \leq 1; \ (i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n)$$

Según el tipo de programación elegido, en números reales o en números enteros, dichas restricciones fijarán que los valores de las X_i sean cero o uno, o bien cualquier número comprendido entre cero y uno.

Veamos cómo se desarrollaría el Modelo de Weingartner:

Sean n proyectos de inversión ($i = 1, 2, \ldots\ldots, n-1, n$) escalonados a lo largo T períodos anuales ($j = 1, 2, \ldots\ldots, T-1, T$) viniendo los mismos definidos en los siguientes cuadros:

CASH-FLOWS ESPERADOS

Año / *Proyecto*	*1*	*2*	—	*m*	—	*T—1*	*T*
1	C_{11}	C_{12}	—	C_{1m}	—	$C_{1,T-1}$	C_{1T}
2	C_{21}	C_{22}	—	C_{2m}	—	$C_{2,T-1}$	C_{2T}
.	.	.	—	.	—	.	.
.	.	.	—	.	—	.	.
.	.	.	—	.	—	.	.
h	C_{h1}	C_{h2}	—	C_{hm}	—	$C_{h,T-1}$	$C_{h,T}$
.	.	.	—	.	—	.	.
.	.	.	—	.	—	.	.
.	.	.	—	.	—	.	.
n—1	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$	—	$C_{n-1,m}$	—	$C_{n-1,T-1}$	$C_{n-1,T}$
n	C_{n1}	C_{n2}	—	$C_{n,m}$	—	$C_{n,T-1}$	C_{nT}

SALIDAS DE FONDOS Y LIMITACIONES PRESUPUESTARIAS

Año / *Proyecto*	*1*	2	—	*T—1*	*T*
1	A_{11}	A_{12}	—	$A_{1,T-1}$	A_{1T}
2.	A_{21}	A_{22}	—	$A_{2,T-1}$	A_{2T}
.	.	.	—	.	.
.	.	.	—	.	.
.	.	.	—	.	.
n—1	$A_{n-1,1}$	$A_{n-1,2}$	—	$A_{n-1,T-1}$	$A_{n-1,T}$
n	$A_{n,1}$	$A_{n,2}$	—	$A_{n,T-1}$	$A_{n,T}$
Presupuesto anual	M_1	M_2	—	M_{T-1}	M_T

La especificación del Modelo de Weingartner es:

$$\text{Máx} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{T} \frac{C_{ij} X_i}{(1+K)^j};$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} X_i \leq M_j; \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, T)$$

$$X_i \leq 1 \quad ; \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n)$$

desarrollando el Modelo:

$$\text{Máx} \left[Z = \frac{C_{11} X_1}{(1+K)} + \frac{C_{12} X_1}{(1+K)^2} + \ldots + \frac{C_{1m} X_1}{(1+K)^m} + \ldots + \frac{C_{1,T-1} X_1}{(1+K)^{T-1}} + \right.$$

$$+ \frac{C_{1T} X_1}{(1+K)^T} + \ldots + \frac{C_{n1} X_n}{(1+K)^2} + \frac{C_{n2} X_n}{(1+K)^2} + \ldots + \frac{C_{n,T-1} X_n}{(1+K)^{T-1}} +$$

$$+ \frac{C_{nT} X_n}{(1+K)^T} = \sum_{j=1}^{T} \frac{C_{1j} X_1}{(1+K)^j} + \sum_{j=1}^{T} \frac{C_{2j} X_2}{(1+K)^j} + \ldots + \sum_{j=1}^{T} \frac{C_{nj} X_n}{(1+K)^j} =$$

$$\left. = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{T} \frac{C_{ij} X_i}{(1+K)^j} \right];$$

$$\left.\begin{array}{llllll}
A_{11} & X_1 + A_{21} & X_2 + \ldots + A_{n-1,1} & X_{n-1} + A_{n1} & X_n \leq M_1 \\
A_{12} & X_1 + A_{22} & X_2 + \ldots + A_{n-1,2} & X_{n-1} + A_{n2} & X_n \leq M_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{1,T-1} & X_1 + A_{2,T-1} & X_2 + \ldots + A_{n-1,T-1} & X_{n-1} + A_{n,T-1} & X_n \leq M_{T-1} \\
A_{1T} & X_1 + A_{2T} & X_2 + \ldots + A_{n-1,T} & X_{n-1} + A_{nT} & X_n \leq M_T \\
 & X_1 & & & \leq 1 \\
 & & X_2 & & \leq 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & X_{n-1} & \leq 1 \\
 & & & & X_n \leq 1
\end{array}\right\}$$

A título de ilustración apliquemos el Modelo de Weingartner a un sencillo ejemplo numérico.

Sean cuatro proyectos de inversión, escalonándose cada uno sobre dos años.

Los "cash-flows (cobros menos pagados) esperados son (cifras en miles de unidades monetarias):

Proyectos	*1*	2	*3*	*4*
Año 1	— 150	— 40	— 30	— 50
Año 2	190	60	50	60

Las salidas de fondos correspondientes son:

Proyectos	*1*	2	*3*	*4*
Año 1	180	70	50	60
Año 2	20	20	10	20

Los presupuestos de inversión de los dos años son, respectivamente, de 250 y 150.

La tasa de actualización elegida es del 10 por 100.

A continuación procederemos al cálculo de los coeficientes de la función objetivo; para ello determinaremos los valores de los "cash-flows" esperados para cada proyecto actualizados al 10 por 100; es decir, sus Valores Netos Actualizados al 10 por 100.

Proyecto 1	$-150/(1+0{,}1) + 190/(1+0{,}1)^2 = 20{,}67$
Proyecto 2	$-40/(1+0{,}1) + 60/(1+0{,}1)^2 = 13{,}22$
Proyecto 3	$-30/(1+0{,}1) + 50/(1+0{,}1)^2 = 14{,}05$
Proyecto 4	$-50/(1+0{,}1) + 60/(1+0{,}1)^2 = 4{,}13$

Aplicando a cada uno de estos coeficientes las variables X_1, X_2, X_3 y X_4, obtenemos la función objetivo a maximizar:

$$Z = 20{,}67X_1 + 13{,}22X_2 + 14{,}05X_3 + 4{,}13X_4$$

Establezcamos las restricciones presupuestarias. Al escalonarse la operación de inversión sobre dos años, las restricciones presupuestarias serán igualmente dos. Para obtenerlas, aplicamos de nuevo las variables X_1, X_2, X_3 y X_4 a las salidas de fondos de cada período y nos fijamos como límite superior a la suma de estas salidas, los presupuestos de los períodos respectivos.

Primer período:

$$180X_1 + 70X_2 + 50X_3 + 60X_4 \leq 250$$

Segundo período:

$$20X_1 + 20X_2 + 10X_3 + 20X_4 \leq 150$$

Indiquemos que las X_i deben variar entre 0 y 1:

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 1 \\ X_2 &\leq 1 \\ X_3 &\leq 1 \\ X_4 &\leq 1 \end{aligned}$$

Omitimos las restricciones de no negatividad de las variables.

El programa es:

$$\text{Máx}\ [Z = 20{,}67X_1 + 13{,}22X_2 + 14{,}05X_3 + 4{,}13X_4]$$

con las restricciones:

$$\left.\begin{array}{lllll} 180X_1 + & 70X_2 + & 50X_3 + & 60X_4 & \leq 250 \\ 20X_1 + & 20X_2 + & 10X_3 + & 20X_4 & \leq 150 \\ X_1 & & & & \leq 1 \\ & X_2 & & & \leq 1 \\ & & X_3 & & \leq 1 \\ & & & X_4 & \leq 1 \end{array}\right\}$$

Una de las características de este programa es su relativa sencillez. El número de variables y de restricciones se reduce al mínimo, puesto que no existen otras variables de decisión que las X_i y cualquier otro aspecto exterior al problema de selección de inversiones propiamente dicho no es tomado en cuenta.

La solución del programa lineal conduce a los siguientes resultados:

$$X_1 = 0{,}722$$
$$X_2 = 1$$
$$X_3 = 1$$
$$X_4 = 0$$
$$Z = 42{,}19$$

Los proyectos 2 y 3 deben ser realizados en su totalidad; el proyecto 4 debe abandonarse. En cuanto al proyecto 1, aparece la cifra 72,2 por 100; esta solución puede aceptarse si el proyecto 1 es fraccionable y puede efectivamente realizarse un 72,2 por 100 del mismo. El valor presente de los "cash-flows" generados por este programa de inversiones tiene un "maximun-maximorum" de 42,19 unidades moentarias.

En el caso de que los proyectos sean no fraccionables, debemos recurrir a la Programación en Números Enteros, llegando a la solución:

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 0$$
$$X_3 = 1$$
$$X_4 = 0$$
$$Z = 34{,}72$$

5. AMPLIACIONES SOBRE EL MODELO ORIGINARIO

5.1. EXCLUSIÓN MUTUA Y CONTINGENCIAS DE PROYECTOS DE INVERSIÓN

Es frecuente que entre las inversiones a seleccionar, ciertas sean mutuamente excluyentes, mientras que otras sean contingentes o dependientes. Supongamos, a título de ejemplo, que en un determinado caso se den tres proyectos que se excluyan mutuamente, sean el 2, 5 y 7; una nueva restricción nos ajustaría el modelo a esta nueva situación:

$$X_2 + X_5 + X_7 \leqq 1$$

Si se tratara de un caso de Programación Lineal en Enteros, esta condición impondría la aceptación de una sola de las tres alternativas.

Si se abandonara la restricción de que X_j fuera un número entero, el problema se trataría por Programación Lineal y la solución incluiría fracciones de proyectos mutuamente incompatibles.

La restricción de proyectos excluyentes, con formulación generalizada, sería:

$$\sum_{j \in J} X_j \leqq 1$$

en la que J representaría un conjunto de inversiones incompatibles.

Supongamos ahora que el proyecto 4 dependa de la aceptación del proyecto 2. Sería suficiente introducir el vínculo lineal

$$X_4 \leqq X_2$$

a fin de que la relación de contingencia entre las dos preposiciones fuera tomada en consideración en la solución, bien fuera suministrada por Programación Lineal, bien por Programación Lineal en números enteros.

5.2. Restricciones materiales y humanas

El modelo podría igualmente adaptarse a fin de tener en cuenta restricciones materiales y humanas. Una condición de la forma:

$$\sum_{j \in J} d_j X_j \leqq d$$

podría añadirse, por ejemplo, al modelo de base.

- d_j representa el número de empleados que posean una determinada cualificación requerida para la realización del proyecto J.
- J constituye el conjunto de proyectos que exijan la presencia de tales trabajadores.
- d sería el máximo número de personas que poseyendo la competencia exigida, se encontrasen disponibles para dichas tareas.

5.3. Transferencia de presupuestos

Hasta donde llevamos expuesto, los presupuestos de inversión son considerados como fijos y los importes de uno no puede transferirse a otros. H. M. Weingartner, para dar más consistencia y realidad a sus trabajos, reformuló su modelo teniendo en cuenta el hecho de que los fondos en exceso el primer año pudieran ser utilizados en el segundo, y así sucesivamente.

5.4. Reinversión de los "cash-flows" del año t en el año $t + 1$

Igualmente el modelo podría aún perfeccionarse introduciendo la posibilidad de reinversiones de los "cash-flows" generados por las primeras inversiones en otros proyectos subsiguientes.

5.5. El modelo simplificado del profesor Suárez

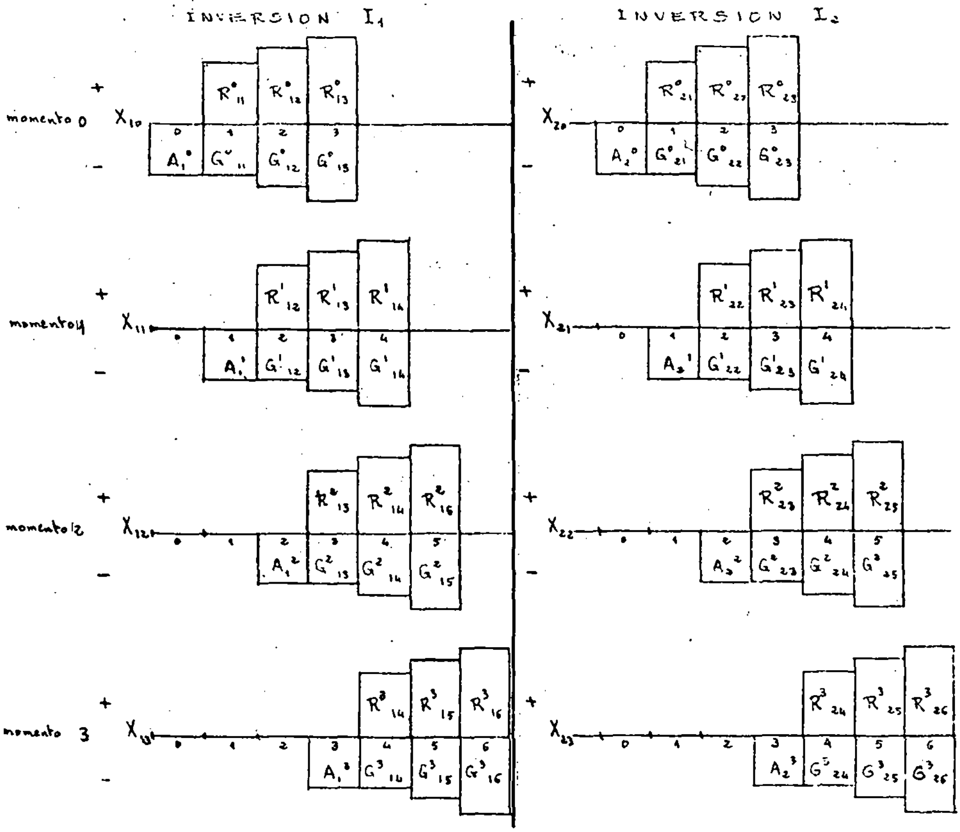
El profesor Andrés Santiago Suárez, en su artículo "Los criterios clásicos de determinación de la rentabilidad y selección de inversiones", esboza un modelo simplificado y altamente pedagógico que, con ligeras ampliaciones sobre el original, pasa a exponer.

Se da la existencia de dos posibles proyectos de inversión a realizarse y que designaremos por I_1 e I_2. Dichos proyectos pueden realizarse en el momento actual, dentro de un año, dos o tres; generando gastos e ingresos a lo largo de tres años, contados a partir del momento de su realización.

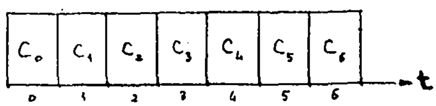
Utilizando la notación:

- V_{it} Valor Capital (N. P. V. o V. A. N.) de la inversión i realizada en el momento t.
- X_{it} Variable binaria que tomará el valor 1 cuando el proyecto i es realizado en el momento t y 0 en el caso contrario.
- A_i^t Desembolso o gasto inicial de la inversión i realizada en el momento t.
- G^t_{ij} Gasto originado en el momento j por la inversión i que se ha realizado en el momento t.
- R^t_{ij} Ingreso producido en el momento j por la inversión i que se ha realizado en el momento t.
- C_j Recursos financieros en el momento j.

A efectos de claridad en la comprensión de este sencillo modelo, podemos visualizar la generación de ingresos y gastos por cada una de estas dos inversiones, según el momento en que se hallan realizado:



teniendo en cuenta las disponibilidades de recursos financieros a lo largo del tiempo:



(*Nota.*—Las áreas de esta representación están carentes de significado.)

Por tanto, tendremos:

$i \in \{1,2\}$; $t \in \{0, 1, 2, 3\}$; $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

El empresario tratará de maximizar la función

$$\text{Máx } z = \sum_{i} \sum_{t} V_{it}\, X_{it} \quad ; \quad (1)$$

con las restricciones financieras:

$$A_1^0 X_{10} + A_2^0 X_{20} \leqslant C_0 \quad ; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} A_1^1 X_{11} + A_2^1 X_{21} \leqslant\ & C_0 - A_1^0 X_{10} - A_2^0 X_{20} + C_1 + \\ & + (B_{11}^0 - C_{11}^0) X_{10} + (B_{21}^0 - C_{21}^0) X_{20} - F_1 \quad ; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1^2 X_{12} + A_2^2 X_{22} \leqslant\ & F_1 - A_1^1 X_{11} - A_2^1 X_{21} + C_2 + \\ & + (B_{12}^0 - C_{12}^0) X_{10} + (B_{22}^0 - C_{22}^0) X_{20} + \\ & + (B_{12}^1 - C_{12}^1) X_{11} + (B_{22}^1 - C_{22}^1) X_{21} - F_2 ; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1^3 X_{13} + A_2^3 X_{23} \leqslant\ & F_2 - A_1^2 X_{12} - A_2^2 X_{22} + C_3 + \\ & + (B_{13}^0 - C_{13}^0) X_{10} + (B_{23}^0 - C_{23}^0) X_{20} + \\ & + (B_{13}^1 - C_{13}^1) X_{11} + (B_{23}^1 - C_{23}^1) X_{21} + \\ & + (B_{13}^2 - C_{13}^2) X_{12} + (B_{23}^2 - C_{23}^2) X_{22} - F_3 ; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F_3 - A_1^3 X_{13} - A_2^3 X_{23} + C_4 + (B_{14}^1 - C_{14}^1) X_{11} + (B_{24}^1 - C_{24}^1) X_{21} + \\ & + (B_{14}^2 - C_{14}^2) X_{12} + (B_{24}^2 - C_{24}^2) X_{22} + (B_{14}^3 - C_{14}^3) X_{13} + (B_{24}^3 - C_{24}^3) X_{23} - F_4 \geqslant 0 ; \quad (6) \end{aligned}$$

$$F_4 + C_5 + (B_{15}^2 - C_{15}^2) X_{12} + (B_{25}^2 - C_{25}^2) X_{22} + (B_{15}^3 - C_{15}^3) X_{13} + (B_{25}^3 - C_{25}^3) X_{23} - F_5 \geqslant 0 ; \quad (7)$$

$$F_5 + C_6 + (B_{16}^3 - C_{16}^3) X_{13} + (B_{26}^3 - C_{26}^3) X_{23} \geqslant 0 ; \quad (8)$$

6. MODELO CAPRI ("Calcul de Programmes d'Investissement")

Describiremos superficialmente una formulación simplificada que no tiene en cuenta los aumentos de capital y que solo considera un tipo de empréstitos.

Variables de decisión

- x_{ij} Variables bivalentes asociadas a la realización o rechazo de la variante j del proyecto i.
- E_t Montante de empréstitos suscritos en el curso del período t.

A efectos de conveniencia consideramos las variables intermedias:

- F_t Volumen de fondos propios al fin del período t.
- T_t Tesorería al fin del período t.

Finalmente el montante de inversiones no identificadas la expresamos por la variable p_t.

Datos del problema

I_{ijt}	Gastos de la inversión dedicada durante el período t a la variante j del proyecto i.
A_{ijt}	Amortización dedicada durante el período t a la variante j del proyecto i.
V_{ij}	Valor residual a la fecha T de la variante j del proyecto i.
M_{ijt}	Margen bruto derivado a lo largo del período t por la variante j del proyecto i.
F_{ot} T_{ot} E_{ot}	Variación durante el período t de los fondos propios, de la tesorería y de los empréstitos (sin incluir los reembolsos) si la empresa no realizase ninguna inversión hasta esta fecha.
$k_1, k_2 \ldots k$	Ritmo de reembolso de un empréstito de 1 franco.
i, i'	Tasas de interés, respectivamente, de los empréstitos suscritos y de la tesorería situada a corto plazo.
$B_{ij'}$	Beneficio actualizado al año 0 de la variante j del proyecto i.
p_t	Montante máximo dedicado al año t a inversiones no identificadas.
i''	Tasa de rentabilidad de estas inversiones.

Restricciones del problema

$\sum\limits_j x_{ij} = 1$ para todo valor de i; traduciendo la exclusión mutua de variantes de un mismo proyecto (la variante "no tener en cuenta" está explícitamente tenida en cuenta).

$$F_t = F_{ot} + F_{t-1} + \sum_{i,j} x_{ij} \left(\frac{M - A}{2} \right)_{ijt} + \frac{i'}{2} T_{t-1} - \frac{i}{2} \sum_{=1}^{=t-1} (E \quad + E_o \quad) \cdot$$

$$\cdot (1 - k_1 \ldots k_{t-} \quad) + \frac{i''}{2} \sum_{=1}^{=t-1} p \quad ;$$

que son las restricciones de cálculo de fondos propios.

$$\sum_{=1}^{=t} (E \quad + E_o \quad)(1 - k_1 - \ldots\ldots - k_{t-} \quad) \leq k \cdot F_{t-1};$$

restricciones relativas al nivel de empréstitos.

$$T_t = T_{ot} + T_{t-1} + \sum_{i,j} x_{ij}\left(\frac{M+A}{2}\right)_{ijt} + \frac{i'}{2} T_{t-1} - \frac{i}{2} \sum_{=1}^{=t-1} (E \quad + E_o \quad) \cdot$$

$$\cdot (1 - k_1 - \ldots - k_{t-} \quad) - \sum_{=1}^{=t-1} (E \quad + E_o \quad) k_{t-} \quad + E_t + E_{ot} -$$

$$- \sum_{i,j} x_{ij} \; I_{ijt} - p_t + \frac{i''}{2} \sum_{=1}^{=t-1} p \quad ;$$

restricciones de cálculo relativas a la tesorería.

$T_t \geq 0$, restricciones de equilibrio financiero de la empresa.

Función económica a optimizar (según la opción elegida)

$$\text{Máx!} \sum_{ij} x_{ij} \, B_{ij}$$

o bien

$$\text{Máx!} \left[F_t + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{ij} x_{ij} \; V_{ij} - \sum_{ij} \sum_{=1}^{=T} x_{ij} (I_{ij} \quad - A_{ij} \quad) \right\} \right]$$

es decir, podemos optar entre dos criterios:

— El criterio de maximizar los beneficios actualizados.

— El criterio de maximizar los fondos propios sobre el horizonte finito 0, T.

Vemos que llegamos a un problema de Programación Lineal, formulado sobre variables mixtas. Su resolución cae dentro de los procedimientos S. E. P. (Separacion y Evaluación Progresiva), procedimiento exploratorio de la clase de "branch and bound".

Los resultados del algoritmo conducen a:

— La lista de inversiones tenidas en cuenta, precisando la variante elegida y su fecha de realización.

— La mejor financiación correspondiente, definida para cada año y fuente de financiación.

— Los resultados aportados por este plan.

Como un plan de inversiones no puede juzgarse únicamente por criterios de rentabilidad, se ha previsto que el Modelo CAPRI pueda ofrecer no tan sólo el mejor plan, sino además los que se encuentren en el entorno del mejor.

(*Nota.*—El Modelo CAPRI ha sido creado y comercializado por la sociedad francesa S. E. M. A.)

7. EJEMPLOS DE JAMES C. T. MAO

7.1. La "ABC Petroleum Company" se enfrenta con el problema de distribuir su presupuesto de inversión entre cinco proyectos; la naturaleza de los mismos, la estimación de sus Valores Netos Actualizados (N. P. V. o V. A. N.) y una previsión de sus salidas de caja la indicamos a continuación:

Proyecto número	*Naturaleza del proyecto*	*V. A. N. / N. P. V.*	SALIDAS A CAJA	
			Año 1	*Año 2*
1	Renovación de la refinería de Essex; este proyecto incrementaría la capacidad en 500 barriles por día.	10	20	20
2	Construcción de una refinería que reemplace a la de Essex; incrementándose, como consecuencia, la capacidad en 1.000 barriles por día.	20	30	15
3	Construcción de un nuevo oleoducto en la referida nueva refinería; ello incrementaría la capacidad en 100 barriles por día.	5	15	5
4	Construcción de un nuevo oleoducto en la refinería de Essex, incrementándose la capacidad en 50 barriles por día.	3	10	7
5	Adquisición de un petrolero a fin de transportar petróleo a otra refinería ya existente; esta propuesta incrementaría la capacidad en 20 barriles por día.	2	5	4

Suponemos que la empresa debe maximizar el Valor Neto Actualizado (V. A. N.) de su cartera de inversiones.

La empresa se ve obligada a limitar sus salidas de fondos en el primer año a 65 unidades monetarias y en el segundo a 46. Por otro lado, la dirección ha determinado un incremento en la capacidad de producción, como mínimo, de 500 barriles por día y se requieren no más de 1.100 barriles por día. Los proyectos 1 y 2 son mutuamente excluyentes, y la aceptación del proyecto 3 está condicionada a la aceptación del proyecto 2.

Ajustando el problema al Modelo de Weingartner:

$$\text{Máx}\left[Z = 10X_1 + 20X_2 + 5X_3 + 3X_4 + 2X_5\right] \qquad \text{[I]}$$

sujeto a:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & 20X_1 + 30X_2 + 15X_3 + 10X_4 + 5X_5 \leq 65 \\
(2) & 20X_1 + 15X_2 + 5X_3 + 7X_4 + 4X_5 \leq 46 \\
(3) & 500X_1 + 1.000X_2 + 100X_3 + 50X_4 + 20X_5 \geq 500 \\
(4) & 500X_1 + 1.000X_2 + 100X_3 + 50X_4 + 20X_5 \leq 1.100 \\
 & X_1 + X_2 \leq 1 \\
 & - X_2 + X_3 \leq 0
\end{array}\right\} \quad [II]$$

siendo X_i igual a uno si el próyecto i es aceptado, y cero si es rechazado. Las dos primeras inecuaciones del conjunto de restricciones representan las limitaciones presupuestarias del primero y segundo año, respectivamente. Las inecuaciones tercera y cuarta expresan las condiciones concernientes a la capacidad de producción y, finalmente, las inecuaciones quinta y sexta reflejan las relaciones de interdependencia entre los proyectos.

7.2. La Gerencia de Planificación y Renovación Urbana de una determinada Area Metropolitana se enfrenta con el problema de distribuir su presupuesto de inversiones entre siete proyectos competitivos de mejora urbana.

La naturaleza de los proyectos en cuestión, la estimación de sus valores netos actualizados (N. P. V.), así como sus salidas netas de caja vienen expresadas en los cuadros adjuntos.

Proyecto número	*Descripción del proyecto*	*V. A. N. N. P. V. estimado (millones)*	*Núm. de personas desplazadas (+) o absorbidas (—) en la zona del proyecto*	
1	Despejar una zona de viviendas ruinosas y levantar en su lugar un parque público	3.984	D. C. D. L.	+ 1.600 + 1.600
2	Desmantelar un matadero y reemplazarlo por un aparcamiento para automóviles	1.294	D. C. D. L.	+ 600 + 600
3	Alternativa al proyecto 1: vender el terreno, una vez despejado, a promotores privados para la construcción de apartamentos de bajo coste, capaces de albergar 1.200 personas.	4.767	D. C. D. L.	+ 1.600 + 400

4	Derribarse una zona de chabolas y sustituirse por apartamentos de baja renta y alta densidad, capaces de albergar 2.000 personas.	11.086	D. C.	+ 600
			D. L.	— 1.400
5	Alternativa al proyecto 4: en lugar de los apartamentos de alta densidad, pueden construirse "singles" con una capacidad total para 1.100 personas.	12.370	D. C.	+ 600
			D. L.	— 500
6	Alternativa al proyecto 4: en lugar de los apartamentos de alta densidad, pueden construirse de una a cuatro viviendas familiares por planta, con una capacidad total de 1.600 personas.	11.642	D. C.	+ 600
			D. L.	— 1.000
7	Derribar una zona de viviendas junto a la vieja estación de ferrocarril y vender el terreno como zona industrial.	6.514	D. C.	+ 2.000
			D. L.	+ 2.000

D. C.: Desplazamiento (recorrido) corto.
D. L.: Desplazamiento largo.

SALIDAS NETAS DE CAJA EN CADA PROYECTO PROPUESTO

Proyecto número	AÑOS				
	1	*2 y 3*	*4 y 5*	*6 a 10*	*Total*
1	15	4.180	695	175	5.065
2	20	1.650	—	—	1.670
3	10	4.230	875	600	5.715
4	10	1.585	5.170	8.630	15.395
5	15	3.150	3.375	10.785	17.325
6	10	4.065	25	11.280	15.380
7	12	4.230	—	3.700	7.942

La Gerencia ha adoptado como objetivos la maximización del Valor Neto Actualizado (V. A. N.) y se encuentra con las limitaciones:

a) El total de salidas netas de caja no debe exceder de
40.000 en el año 1
15.000.000 en los años 2 y 3
15.000.000 en los años 4 y 5
12.000.000 en los años 6 a 10

b) El número de personas desplazadas en corto recorrido (D. C.) no debe exceder de 3.500.

c) El número de viviendas de renta baja construidas en el programa de urbanismo debe superar las derribadas del mismo tipo.

d) Por cada proyecto no residencial elegido debe emprenderse por lo menos otro residencial (de vivienda).

e) Los proyectos 4, 5 y 6 son mutuamente excluyentes, al igual que los proyectos 1 y 3.

f) A instancia de los urbanistas el proyecto 4 no debe seleccionarse a menos que el proyecto 1 ó 3 sean puestos en marcha.

g) Por razones políticas, bien el proyecto 3, bien el proyecto 7, deben ser tenidas en consideración.

El caso considerado puede contemplarse como un problema de Programación Lineal con la adición de las restricciones de que todas las variables tomen sólo los valores cero o uno. Sea X_j la fracción del proyecto j que la Gerencia decide incluir en su cartera de proyectos. El problema radice en encontrar los valores de X_j ($j = 1, 2, \ldots, 7$), sujetos a las restricciones (2), con las condiciones de "integrality" (3) y que al mismo tiempo maximicen la función objetivo (1):

$$\text{Máx } \{Z = 3{,}984X_1 + 1{,}294X_2 + 4{,}767X_3 + 11{,}086X_4 + 12{,}370X_5 + 11{,}642X_6 + 6{,}514X_7\} \quad (1)$$

sujeto a:

$$\left.\begin{array}{r}
15X_1 + 20X_2 + 10X_3 + 10X_4 + 15X_5 + 10X_6 + 12X_7 \leq 40 \\
4{,}180X_1 + 1{,}650X_2 + 4{,}230X_3 + 1{,}585X_4 + 3{,}150X_5 + 4{,}065X_6 + 4{,}230X_7 \leq 15{,}000 \\
695X_1 + 0X_2 + 875X_3 + 5{,}170X_4 + 3{,}375X_5 + 25X_6 + 0X_7 \leq 15{,}000 \\
175X_1 + 0X_2 + 600X_3 + 8{,}630X_4 + 10{,}785X_5 + 11{,}280X_6 + 3{,}700X_7 \leq 12{,}000 \\
1{,}600X_1 + 600X_2 + 1{,}600X_3 + 600X_4 + 600X_5 + 600X_6 + 2{,}000X_7 \leq 3{,}500 \\
-1{,}600X_1 - 600X_2 - 400X_3 + 1{,}400X_4 + 500X_5 + 1{,}000X_6 - 2{,}000X_7 \geq 0 \\
X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq X_1 + X_2 + X_7 \\
X_1 + X_3 \leq 1 \\
X_4 + X_5 + X_6 \leq 1 \\
X_1 + X_3 \geq X_4 \\
X_3 + X_7 \geq 1
\end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{r}
1 \geq X_j \geq 0 \quad (j - 1, 2, \ldots, 7) \\
X_j \rightarrow \text{entero}
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Solución óptima $= X_1 = X_4 = X_5 = X_7 = 0;\ X_2 = X_3 = X_6 = 1$

Según esto, a fin de maximizar el V. N. A., la Gerencia debe emprender los proyectos 2, 3 y 6 y rechazar los restantes.

8. EL PLANTEAMIENTO DE HORST ALBACH

Según Horst Albach, los modernos planteamientos del Cálculo de Economicidad se diferencian considerablemente de las formas clásicas, tales como "Período de recuperación", "Valor Neto Actualizado o Valor Capital", "Tasa de Rentabilidad Interna", por citar algunas de ellas. En las actuales tendencias de pensamiento en este campo no se analiza cada uno de los objetos de la inversión de forma aislada, sino como constituyentes de una parte integrante del complejo global de la totalidad de los objetos de la inversión y de todas las posibilidades de financiación que se ofrecen a la empresa como conjunto. Continúa Albach: "El conjunto empresarial y no cada uno de los objetos de la inversión constituyen el contenido de este procedimiento de cálculo denominado combinatorio. Mediante estas nuevas formas de cálculo no se pierde de vista que los aspectos más importantes del problema de decisión práctico, fundamental para la realización de decisiones de inversión empresarial, solamente pueden comprenderse en un proceso del cálculo de la economicidad que tenga en cuenta la interdependencia de las diferentes proposiciones de inversión".

La idea clave es la siguiente:

En un año determinado se han de elegir aquellas inversiones que, siendo rentables, crean al mismo tiempo condiciones favorables para la realización de futuras inversiones. Es decir, sería preferible una inversión hoy menos rentable, si surgiera la posibilidad dentro de unos años de una inversión extraordinariamente favorable y que únicamente pudiera financiarse con medios propios; ello si se diera el caso de que la inversión hoy más rentable no pudiera liberar los medios financieros necesarios, mientras que la menos favorable pudiera proporcionar los medios financieros necesarios en el momento futuro que se precisaran.

De una compilación de todas las inversiones y posibilidades de financiación actuales y futuras, se ha de elegir aquella combinación y sucesión de inversiones que haga máximo el beneficio total al final de un determinado período de tiempo en el que se basa la planificación. Vemos, pues, que nos encontramos ante un problema de estructura dinámica.

Con generalidad, y siguiendo a Albach, el cálculo de la economicidad se formularía como sigue:

$$c'x + g'y = C \text{ máx} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} Bx + Dy \leq w & (2) \\ V_i x \leq s_i \quad (i = 1, \ldots, n) & (3) \\ y \leq K & (4) \\ x, y \geq 0 & (5) \end{cases}$$

c = el vector del valor capitalizado (V. A. N.) de todas las posibilidades de inversión,

g = el vector capitalizado de todas las posibilidades de financiación,

x = el vector de las posibilidades de inversión,

y = el vector de las posibilidades de financiación,

B = la matriz del efecto financiero de los objetos de inversión (el plan de cobros y pagos acumulativos),

D = la matriz del efecto financiero de las posibilidades de financiación,

w = vector de los medios financieros existente,

V_i = la matriz de producción para el producto ξ_i.

s_i = cantidades de saturación en el mercado para el producto ξ_i,

K = vector del límite crediticio, o bien, del capital propio disponible.

La expresión (1) contiene la función final de la Política de Inversión de la empresa. La restricción (2) reproduce el plan financiero de la empresa, no siendo otra cosa que la formulación matemática de la exigencia del mantenimiento del equilibrio financiero de cada período. La expresión (3) concierne al plan de ventas por parte de la empresa. La (4) no expresa más que el techo crediticio. La (5) nos sitúa en el campo de la "programación económica".

9. CONCLUSIONES

Este artículo tiene por finalidad el realizar una apertura de fronteras en la literatura castellana especializada en estos campos. Debido a lo nuevo del tema se le dado un tratamiento quizá superficial en algunos momentos e incluso hemos omitido aspectos tan interesantes como, por ejemplo, el análisis del programa dual derivado del primal del Modelo de Weingartner. Todo ello se suple con la extensa bibliografía ofrecida sobre el tema que hemos esbozado a lo largo de estas páginas.

Como conclusiones de esta aproximación en nuevos derroteros en el campo de inversiones ofrecemos escuetamente las siguientes:

— Limitación e insuficiencia de los criterios tradicionales de selección de inversiones bajo determinadas circunstancias.

— Necesidad de estudiar la problemática de la inversión como un todo, ello con miras a conseguir una Política de Inversiones conjunta y coherente.

— Necesidad de relacionar todas las posibilidades de inversión con todas las posibilidades de financiación, con ello se consigue proyectar la interdependencia entre los diferentes proyectos de inversión.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

1. ABRAHAM, C., y THOMAS, A.: *Microéconomie-Décisioóns optimales dans l'entreprise et dans la nation.* Dunod (1970).
2. ADLER, M.: *The Cohen extension to the Sharpe diagonal model for Portfolio selection.* Carnegie Inst. Tech. 15 May (1963).
3. ALBACH, Horst: *Modelo simultáneo de inversión y financiación de Albach.* (Traducción por el profesor Santiago García Echevarría para uso en la cátedra de Política Económica de la Universidad de Madrid. Facultad de Económicas.) (1972).
4. ALBACH, Horst: "Cálculo de economicidad y decisión de inversión en la empresa". *Boletin de Estudios Económicos de la Universidad de Deusto,* volumen XVIII (sept-dic. 1963), núm. 60 (1963).
5. ALCHIAN, A. A.: "The rate of interest, Fisher's rate of return over cost, and Keynes' internal rate of return". *Am. Econ. Rev.*, 938-42 (1955).
6. AUDIBERT, J. M.; HOLL, J. Ch., y PLAS, J. P.: *CAPRI. Un modéle de calcul de programmes d'investissement.*
7. BALINSKI, M. L.: *On finding integer solutions to linear programs.* Princeton: Mathematica (1964).
8. BAUMOL, William J., y QUAND, Richard, E.: "Investment and Discount Rate under Capital Rationing. A Programming Approach". *The Economic Journal,* LXXV, 298 (Jn. 1965) (1965).
9. ISRAEL, A.; BEN, y CHARNES, A.: *On some problems of diophantine programming.* Cahiers du Centre de l'Recherche Operationelle, 215-80 (1962).
10. BERANEK, W.: *Analysis for Financial Decisions.* Homewood, Ill.: Irwin (1963).
11. BOITEUX, M., y D'EPENOUS, F.: "Long-Term Programming of Investments in the Electric Power Industry". WOLFE, P. (editor): *The RAND Symposium on Mathematical Programing,* RAND R-351, Santa Mónica, California (1960).
12. CARLETON, W.: "Linear Programming and Capital Budgeting Models: A new interpretation". *Journal of Finance* (1969).
13. CHABERT, M.: *Jornées internationales d'étude des programmes à long terme.* UNESCO, París (1965).
14. CHARNES, A., y COOPER, W. W.: *Chance-constrained programming.* Management Sci., 73-9 (1959).
15. CHARNES, A., y COOPER, W. W.: *Management models and Industrial applications of linear programming.* Wiley (1961).
16. CHARNES, A.; COOPER, W. W., y MILLER, M. H.: "Application of linear programming to financial budgetind and the costing of funds". *J. Business,* 20-46 (1959).
17. CHARNES, A.; COOPER, W. W., y MILLER, M.: *Dyadic Programs and Subdual Methods.* Lafayette: Purdue University Research Project for Methodological Aspects of Management Science (1957).
18. CHARNES, A., y THORE, S.: *Planning for liquidity in savings and loan associations.* ONR Research Memorandum No. 95. Evanston: Northwestern Univ. Tech. Inst. (1964).
19. CORD, J.: *A method for allocating funds to investment projects when returns are subject to uncertainty.* Management Sci. 335-41 (1964).
20. DEAN, Joel: *Capital budgeting.* Columbia Univ. (1951).
21. DYCKMAN, W. L.: *Allocating funds to investment projects when returns are subject to uncertainty: a futher comment.* Management Sci., 348-50 (1965).
22. EASTMAN, W. L.: *Allocating funds to investment projects when returns are subject to uncertainti: a futher comment.* Management Sci. (1965).

23. ELTON, E.: "Capital Rationing and External Discount Rates". *Journal of Finance* (1970).
24. FARRAR, D. E.: *The investment decision under uncertainty.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1962).
25. FISHER, Irving: *The theory of interest.* Macmillan, New York (1930).
26. HALDI, J., e ISAACSON, L.: *A linar integer programming Code.* 1964 Annual Meeting of the Econometric Society. Chicago (1964).
27. HERTS, D. B.: *Risk analysis in capital investment.* Harvard Business Rec., 95-106 (1964).
28. HILLIER, F.: *Derivation of probabilistic information of the evaluation of risky investments.* Management Sci., 443-57 (1963).
29. HIRSHLEIFER, J.: "Efficient allocation of capital in an uncertain wold". *Am. Econ. Rev.*, 77-85 (1964).
30. HIRSHLEIFER, J.: "On the theory of optimal investment". *J. Pol. Econ.*, 329-52 (1958).
31. IJIRI, Y.: *Managements Goals and Accounting for Control.* Amsterdam: Nort-Holland Publishing Co. (1965).
32. IJIRI, Y.; LEVY, F. K., y LYON, R. C.: "A linear Programming Model for Budgeting and Financial Planning". *Journal of Accounting Research* (1963).
33. KAPLAN, Seymour: *Solution o fthe Lorie-Savage and similar integer programming problems by the generalized Lagrange multiplier method.* Operation Research (1966).
34. KEYNES, J. M.: *The general theory of empleyment, money and interest.* London (1936).
35. KRUTILLA, J. V., y ECKSTEIN, O.: *Multiple Purpose River Revelopment.* Baltimore: The Johons Hopkins Press (1958).
36. LERNER, E. M., y RAPPAPORT, A.: "Limits in Discount Cashflow". *Harvard Business Review* (1968).
37. LORIE, J. H., y SAVAGE, L. J.: "Three problems in rationing capital4. *J. Business*, 229-39 (1955).
38. LUSZTIG, P., y SCHWAB, B.: "A note on application of linear programming to capital buggeting". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (1968).
39. MAO, J. C. T.: *Quantitative Analysis of Financial Decisions.* London: MacMillan (1969).
40. MAO, J. C. T.: *Efficiency in Public Urban Renewal Expenditures Through Capital Budgeting.* Berkeley: Center for Real Estate and Urban Economics, University of California (1965).
41. MAO, J. C. T.: "Survey of Capital Budgeting: Theory and Practice". *Journal of Finance* (1970).
42. MARGLIN, S.: *Approaches to dynamic investment planning.* North Holland Publishing Co. Amsterdam (1963).
43. MARKOWITZ, H. M.: *Portfolio selection.* Wiley, New York (1959).
44. MARTIN, G. T.: *An accelerated euclidean algorithm for integer linear programming*, in (24), págs. 311-18.
45. MASSE, P., y GIBART, R.: "Application of linear programming to Investments in the Electric Power Industry". *Management Science* (1957).
46. NASLUND, B.: *A model of capital budgeting under risk.* Department of Forestry Products, Royal College of Forestry. Sweden, Mimeo (1965).
47. NASLUND, B.: *Decisions under risk: economic applications of chance constrained programming.* ONR Res. Memorandum No. 114, Management Sci. Res. Group. Carnegie Inst. Tech., Graduate School of Industrial Administration, Pittsburgh (1964).
48. NEMHAUSER, G. L., y ULLMANN, Z.: "Discrete Dynamic Programming and capital budgeting". *Management Science* (1969).
49. ORDEN, A.: "Coordinative budgets in linear programs". *Revue Francaise de Recherche Operationnelle* (1966).
50. PRATT, J. W.: "Risk aversion in the small and in the large". *Econometrica*, 122-36 (1964).

51. REITER, S.: "Choosing an investment program among interdependent projects". *Rev. Econ. Studies,* 32-6 (1963).
52. REITER, S., y SHERMAN, G.: *Discrete optimizing.* Inst. for Quantitative Res. in Economics and Banagement, Paper 37. Krannert Graduate School of Industrial Administration, Purdue University.
53. ROBICHEK, A. A.; TEICHROEW, D., y JONES, J. M.: "Optimal short term financing decision". *Management Science.*
54. SHARPE, William M.: "A simplified model of portfolio selection". *Management Sci.,* 277-93 (1963).
55. SOLOMON, E.: *The management of corporate capital.* The Free Press, Glencoe (1959).
56. SOLOMON, E.: "The Arithmetic of capital Budgeting Decisions". *Journal of Business* (1956).
57. UERGUE, J. M.: "Un modele sequentiel de financement optimal a long terme dans l'entreprise". *Revue Economique* (1969).
58. WEINGARTNER, H. Martin: "The excess present value index a theoretical basis and critique". *J. Accounting Res.,* 213-24 (1963).
59. WEINGARTNER, H. Martin: *Mathematical programming and the analysis of capital budgeting problems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1963).
60. WEINGARTNER, H. Martin: "Capital Budgeting of Interrelated Projects: Survey and Synthesis". *Management Science* (1966).
61. YOUNG, R. D.: *A primal (all integer) integer programming algorithm: antecedents, description, proof of finiteness, exemplification.* Working Paper No. 52. Stanford Univ. Grad. School of Business (1964).
62. ZIMMERMANN, Werner: "Flexible investment planning by integer linear programming". *Ablauf-und Planungstorschung* (1968).
63. AGOSTINI, Jean-Marie: *Le choix del investissements.* Programmation mathematique. Dunod ed. (1972).
64. CAL PARDO, F.: *La tasa de actualización en el análisis de inversiones.*
65. GARCÍA ECHEVARRÍA, Santiago: *Política Económica de la Empresa.* Universidad de Deusto (1972).
66. GREMILLET, Alain: *Selection et controle des investissement* (1972).
67. SUÁREZ SUÁREZ, A. S.: "Los criterios clásicos de determinación de la rentabilidad y selección de inversiones. Crítica y esbozo de un nuevo modelo de programación de inversiones". *Racionalización* (1968).
68. ALGAN, M.; CERON, J., y BERTIER, P.: "Méthode pratique de détermination d'un plan optimun d'investissement". *Revue Metra,* vol. 2, núm. 3 (1965).
69. L'HERMITTE, P., y BESSIERE, F.: *Sur les possibilités de la programmation non linéaire apliqué e au choix des investissements.* Actes de la troisiéme conférence internationale de Recherche Opérationnelle. Oslo. Dunod (1963).
70. "La détermination des régles de gestion a long terme dans une entreprise". *Revue Francaise de Recherche Operationnelle,* vol. II.
71. SREEDHARAN, V. P., y VEIN, H. H.: "Stochastic, multistage, multiproduct investment mode". *SIAM Journal on Applied Mathematics,* 15 (marzo 1967).
72. SALAZAR, R. C., y SUBRATA, K. S.: "A simulation model of capital budgeting under uncertainty". *Manageent Science,* 15, núm. 4 (enero 1969).
73. LEONATO MARSAL, R.: *Planificación y evaluación de inversiones* (1973).
74. ALBACH, H.: *El presupuesto de inversión óptimo, en situación de incertidumbre* (1967) (recogido en ref. 65).