La localización óptima en un espacio unidimensional

ANDRES-SANTIAGO SUAREZ SUAREZ

1. INTRODUCCION.

La determinación del lugar geográfico en que debe ubicarse la unidad económica de producción, de tal forma que su beneficio sea máximo o su coste mínimo, es algo que viene preocupando al economista desde hace mucho tiempo. El espacio geográfico no es neutral en el quehacer económico. Una empresa será más o menos rentable según que se localice en uno u otro lugar. Para determinar la localización óptima de la unidad económica de producción se han formulado múltiples modelos que responden a situaciones económicas diversas (1).

En este trabajo vamos a estudiar el problema de la localización óptima en espacios unidimensionales, tales como carreteras, líneas férreas, vías fluviales, litoral marítimo, etc., y mostraremos la utilidad del concepto de población o ciudad mediana para resolver tales problemas.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Se quiere instalar una fábrica o un centro de distribución comercial para abastecer los clientes que se hallen distribuidos a lo largo de un espacio unidimensional, como, por ejemplo, una carretera. El producto en cuestión se le suministra cada período de tiempo (día, semana, mes...) a los distintos clientes, y se supone que cada cliente —o centro de consumo— requiere la utilización de una unidad de transporte (furgoneta, camión, barcaza, etc.). Una vez abastecido un cliente o centro de consumo, la unidad de transporte retorna vacía a la factoría o centro de distribución comercial con el objeto de volver a cargar y abastecer otro cliente o lugar

(1) Muchos de estos modelos son estudiados en nuestro trabajo: "La localización óptima de la unidad económica de producción". *Economía Política* núm. 64, mayo-agosto 1973, págs. 203-272.

de consumo, y así sucesivamente. Al llegar al período de tiempo siguiente se vuelve a repetir nuevamente todo el proceso de distribución, etc.

El problema consiste en determinar el lugar en que debe ubicarse la factoría —o centro de distribución comercial— de tal forma que la distancia a recorrer por la unidad de transporte sea mínima. Si los costes de transporte son proporcionales a la distancia, la localización óptima será aquella que haga mínimo el coste total de distribución o transporte.

En este problema pueden darse dos casos:

Caso A.—La demanda se distribuye uniformemente a lo largo de la vía de transporte. Por ejemplo, esto es lo que ocurre con la calle de una ciudad cuando se trata de productos de consumo corriente, o con carreteras que atraviesan zonas rurales muy pobladas.

Caso B.—La demanda se distribuye de forma discontinua a lo largo de la vía de transporte. Existen tramos sin población y, por lo tanto, sin demanda, porque la población se agrupa en pequeños poblados. Dichos poblados se hallarán repartidos de forma irregular, y pueden tener igual o distinta capacidad de consumo.

3. EL CASO DE DEMANDA UNIFORME.

Sea la vía de transporte OB (fig. 3.1) sobre la que la demanda del producto en cuestión se halla distribuida uniformemente.

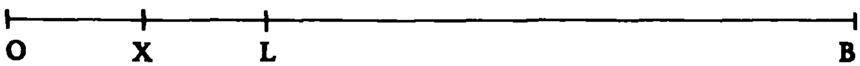

FIGURA 3.1

en donde

O = Extremo de la izquierda de la vía de transporte, que tomamos como origen.

B = Longitud de la vía.

X = Variable distancia, contada a partir de O.

$\bar{A}$ = Localización óptima (incógnita del problema).

El problema consistirá en determinar el valor de L que minimice la distancia total a recorrer, que viene dada por:

$$\boxed{\begin{gathered} D = 2\int_0^L (L - X)\,dX + 2\int_L^B (X - L)\,dX = \\ = 2L^2 + B^2 - 2LB \end{gathered}}$$

En efecto, la unidad de transporte (una furgoneta, por ejemplo) tiene que efectuar un recorrido (de ida y vuelta) a cada uno de los puntos situados a la izquierda y a la derecha de L. Cuando se abastece un punto situado a la izquierda de L, la distancia recorrida será $2(L - X)$, y cuando se abastece un punto situado a la derecha de L, la distancia recorrida será $2(X - L)$. Dichas distancias, al variar X, podemos disponerlas en forma de un doble triángulo, tal como se indica en la figura 3.2 siguiente.

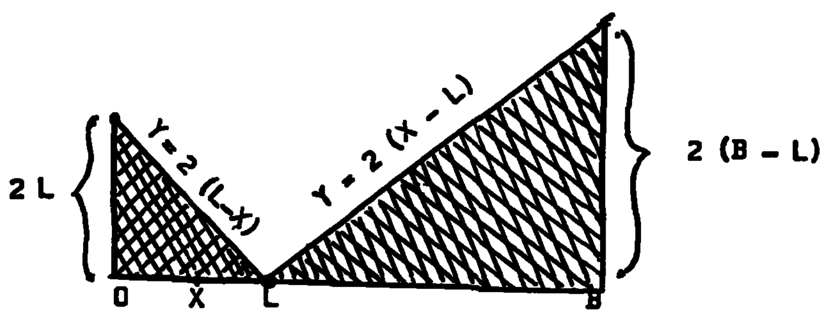

FIGURA 3.2

A la distancia total a recorrer le vamos a asociar un número que venga dado por la suma de las áreas de los dos triángulos rectángulos de la figura anterior, es decir:

$$D = 2\int_0^L (L - X)\,dX + 2\int_L^B (X - L)\,dX = 2L^2 + B^2 - 2LB$$

Y a este mismo resultado hubiéramos llegado también sumando simplemente las áreas de los dos triángulos rectángulos, a saber:

$$\frac{1}{2}(L \times 2L) + \frac{1}{2}[(B - L) \times 2(B - L)] = 2L^2 + B^2 - 2LB$$

El valor de D (área de la zona sombreada de la figura anterior) dependerá del lugar en que situemos a L. Por lo tanto, la localización óptima vendrá dada por aquel valor de L que minimice el valor de D, es decir:

$$\frac{dD}{dL} = 4L - 2B = O \Rightarrow L = \frac{B}{2}$$

$$\frac{d^2D}{dL^2} = -2 < D$$

La localización óptima coincide, pues, con el punto medio del segmento OB, es decir, se halla situada en la mitad de la vía de transporte.

4. DISTRIBUCION NO UNIFORME DE LA DEMANDA.

Los consumidores normalmente se agrupan en poblados de diferente tamaño a lo largo de la vía de transporte. Existen aldeas, villas y ciudades en determinados puntos, y grandes tramos de la vía sin población. Este es, sin duda, el caso más frecuente, y el problema se halla en buscar el lugar en que debe ubicarse la factoría o el centro de distribución comercial con el objeto de minimizar el coste de distribución o de abastecimiento de las distintas poblaciones.

Este caso podemos ilustrarlo con el siguiente diagrama:

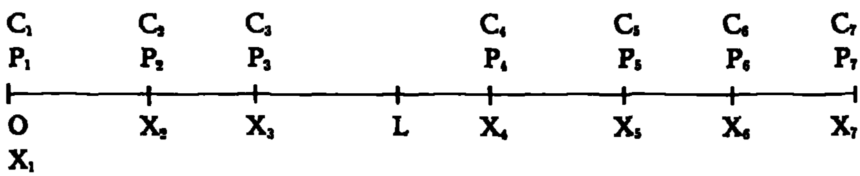

FIGURA 4.1

en donde

O = Extremo de la izquierda de la vía de transporte, que tomamos como origen.

P_i = Poblado i, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

C_i = Demanda o importancia relativa (ponderación) de la población i, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

X_i = Variable distancia, contada a partir de O, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

L = Localización óptima (incógnita del problema).

La localización óptima será aquel valor de L que minimice los costes totales de distribución o transporte (costes de reparto), y se hallará en la ciudad "mediana", es decir, en aquella ciudad que deje tantas ciudades a la derecha como a la izquierda.

En una colección de datos ordenados, la mediana —promedio estadístico— es aquel valor de la serie que deja tantos datos a la derecha como a la izquierda, es decir, es aquel valor de una distribución que divide la suma de frecuencias en dos mitades. Cuando el número de datos es par, se conviene en tomar como mediana la media aritmética de los dos valores centrales, aunque —a nuestros efectos— se podría tomar cualquiera de dichos valores o uno intermedio.

La suma de las desviaciones en valor absoluto de los términos de una serie con relación a un número fijo M se hace mínima cuando dicho número coincide con la mediana, y esta propiedad de la mediana es de gran utilidad en teoría de la localización, pues cuando se trata de espacios unidimensionales (carreteras, ríos, etc.) nos permite determinar la localización que minimiza los costes de distribución con suma facilidad.

En la figura 4.1 anterior, la ciudad mediana es la P_4. Vamos a demostrar que la localización óptima se halla siempre en dicha ciudad mediana. Supondremos, con el objeto de simplificar la demostración, que $C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_n = 1$, es decir, que todas las poblaciones tienen igual capacidad de consumo. Este supuesto no le resta generalidad a la demostración, pues si, por ejemplo, tuviéramos que $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ y $C_3 = 4$, ello equivaldría a la existencia de una población P_1, dos poblaciones P_2 y cuatro poblaciones P_4, con unas capacidades de consumo unitarias.

La localización óptima vendrá dada por aquel valor de L que haga mínima la expresión:

$$S_1 = 2\sum_{i=1}^{n} | X_i - L | = 2\sum_{i=1}^{3} (L - X_i) + 2\sum_{i=4}^{7} (X_i - L) \qquad [4.1]$$

Cuando $L = X_4$, es decir, la localización coincide con la ciudad mediana, la distancia total a recorrer será:

$$\overline{S}_1 = 2\sum_{i=1}^{n} | X_i - X_4 | = 2\sum_{i=1}^{3} (X_4 - X_i) + 2\sum_{i=5}^{7} (X_i - X_4) \qquad [4.2]$$

El valor de S_1 es siempre superior al valor de $\overline{S}_1$, porque hallando la diferencia entre ambos valores tenemos que:

$$S_1 - \overline{S}_1 = 2\,(X_4 - L) > 0 \qquad [4.3]$$

y cuando $X_4 = L \Rightarrow (S_1 - \overline{S}_1) = 0$.

De igual modo, si la localización estuviera situada a la derecha de la ciudad mediana, tal como se indica en la figura 4.2, llegaríamos a la misma conclusión.

C_1	C_2	C_3	C_4		C_5	C_6	C_7
P_1	P_2	P_3	P_4		P_5	P_6	P_7
0	X_2	X_3	X_4	L	X_5	X_6	X_7
X_1							

FIGURA 4.2

En efecto:

$$S_2 = 2\sum_{i=1}^{n} | X_i - L | = 2\sum_{i=1}^{4} (L - X_i) + 2\sum_{i=5}^{7} (X_i - L) \qquad [4.4]$$

$$\overline{S}_2 = 2\sum_{i=1}^{n} | X_i - X_4 | = 2\sum_{i=1}^{3} (X_4 - X_i) + 2\sum_{i=5}^{7} (X_i - X_4) \qquad [4.5]$$

de donde

$$S_2 - \overline{S}_2 = 2\,(L - X_4) > 0 \qquad [4.6]$$

y cuando $X_4 = L \Rightarrow (S_2 - \overline{S}_2) = 0$.

Queda, pues, demostrado que la localización óptima coincide con la ciudad mediana.

5. UNOS EJEMPLOS ILUSTRATIVOS.

Las poblaciones A, B, C, D y E, de igual capacidad de consumo, se distribuyen a lo largo de una carretera tal como se indica en el siguiente diagrama:

$C_1 = 1$ $C_2 = 1$ $C_3 = 1$ $C_4 = 1$ $C_5 = 1$
A   B   C   D   E

40 kms.   50 kms.   20 kms.   120 kms.

0   40 kms.   90 kms.   110 kms.   230 kms.

FIGURA 5.1

La localización óptima se halla en la ciudad mediana C, porque ubicando en ella la factoría o el centro de distribución comercial, la distancia total a recorrer para el reparto es mínima, como podemos comprobar seguidamente.

Si localizamos en A: $40 \times 2 + 90 \times 2 + 110 \times 2 + 230 \times 2 = 940$

" " " B: $40 \times 2 + 50 \times 2 + 70 \times 2 + 190 \times 2 = 700$

" " " C: $50 \times 2 + 90 \times 2 + 20 \times 2 + 140 \times 2 = \boxed{600} \longrightarrow$
$\longrightarrow$ *Mínimo.*

" " " D: $20 \times 2 + 70 \times 2 + 110 \times 2 + 120 \times 2 = 640$

" " " E: $120 \times 2 + 140 \times 2 + 190 \times 2 + 230 \times 2 = 1.360.$

Sean ahora, por ejemplo, las ciudades A, B y C, de diferente capacidad de consumo, que se distribuyen a lo largo de una carretera tal como se indica en el diagrama siguiente:

$C_1 = 90$ $C_2 = 30$ $C_3 = 60$
A   B   C

20 kms.   50 kms.

0   20 kms.   70 kms.

FIGURA 5.2

Si ordenamos los datos del gráfico anterior en forma de una tabla de distribución de frecuencias, tenemos que:

TABLA 5.1

Ciudades	*Distancias*	*Consumos*	*Consumos acumulados*
A	0	90	90
B	20	30	120
C	70	60	180

$$\frac{180}{2} = 90$$

La capacidad mediana es aquella que divide la suma de frecuencias en dos mitades. Por tanto, la localización óptima se halla en A, B o en cualquier punto intermedio, como podemos comprobar seguidamente.

Si localizamos en A: $20 \times 2 \times 30 + 70 \times 2 \times 60 = \boxed{9.600}$

" " " B: $20 \times 2 \times 90 + 50 \times 2 \times 60 = \boxed{9600}$

Mínimo

" " " C: $70 \times 2 \times 90 + 50 \times 2 \times 30 = 15.600$

Aquellas poblaciones y ciudades de mayor capacidad de consumo atraen, como es lógico, nuevas industrias y centros de distribución comercial, con el objeto de economizar costes de distribución o transporte. Si a esto le añadimos las economías "internas-externas" o economías interindustriales y las diferentes modalidades de economías "externas-externas" o economías de urbanización, podemos comprender —al menos parcialmente— el "irracional" crecimiento de muchas de nuestras ciudades. El principio de racionalidad económica nos está llevando a situaciones que contrastan o chocan con otras perspectivas y anhelos de esta contradictoria sociedad, y así, con la aplicación estricta de dicho principio, se crean gigantescos e inhabitables conglomerados urbanos, se contamina y destruye la naturaleza, etc. Se precisa elaborar un principio de racionalidad global.