Localización y dimensión óptima de plantas industriales: una aplicación a empresas distribuidoras de leche

RAMON ALONSO SEBASTIAN
Profesor de Economía de la Empresa
de la Universidad Politécnica de Madrid

1. INTRODUCCION

Las grandes empresas o las asociaciones de pequeñas empresas se enfrentan al problema de cómo organizar racionalmente la distribución de sus productos hasta los centros de consumo, en un complejo proceso de producción y distribución que incluye el almacenamiento y la transformación de productos semielaborados en varias factorías.

Estas grandes empresas (o conjunto de empresas integradas) se proponen llevar a cabo el proceso de distribución en sus diferentes fases, que aquí sistematizaremos en tres (producción en centros de origen, transformación en centros intermedios y comercialización en centros de destino o consumo), de tal forma que los costes totales sean mínimos, con la condición de situar en destino un volumen de producto suficiente para atender la demanda. Este es un objetivo típico dentro de la gama de políticas que siguen las empresas a corto plazo.

La importancia de los modelos de distribución comercial en la programación mercadotécnica radica en cómo abordan la cuestión de las interrelaciones entre las diversas políticas empresariales en materia de transporte, almacenamiento y producción. Así, por ejemplo, la solución adoptada en materia de transporte influye sobre las necesidades de almacenamiento, y viceversa. Interesa, por tanto, dar soluciones conjuntas a estas políticas de la empresa, en función de objetivos tales como la minimización del coste o la maximización del beneficio para cotas dadas de producción y/o demanda.

En los modelos más sencillos, se tienen en cuenta únicamente las fases de origen y destino, llegándose en los más completos a las tres fases citadas (origen, transformación y destino) y a la generalización del modelo a varios productos (modelos de multiproducto).

Los modelos de distribución comercial, en cuanto a su formulación, son modelos generalizados de transporte (Hitchcock), que pueden resolverse por programación lineal, al ser lineales tanto la función objetivo como las restricciones, o mediante la aplicación de algoritmos específicos, en ciertos casos.

Es preciso distinguir claramente entre la utilización de un modelo de transporte para la programación a corto y a largo plazo. En la programación a corto plazo, la ubicación de los centros de origen, transformación y consumo están dadas, así como también las respectivas capacidades de producción y almacenamiento (los *stocks* al comienzo de cada período), la demanda previsible en cada centro de consumo por unidad de tiempo y los costes unitarios para las diferentes actividades. Si el período de tiempo que cubre la programación es, por ejemplo, de una semana, algunos datos, tales como las expectativas de demanda, los *stocks* e incluso los costes unitarios, pueden variar de una semana a otra, mientras que otros datos (las capacidades de producción y almacenamiento, las distancias entre los centros de la red de distribución) permanecen constantes. Tenemos así unos *datos a corto*, cuya variación es semanal, y unos *datos a largo*, que se mantienen fijos, hasta tanto no se introduzcan reformas estructurales en la red. Aquí las incógnitas son solamente los flujos de producto que atraviesan la red desde los centros de origen a los centros de consumo.

Por el contrario, en el planteamiento a largo plazo, las incógnitas no son sólo los flujos sino también ciertos nudos de la red, esto es, las ubicaciones de algunos de los centros. Por regla general, se suponen dados los centros de origen y de consumo, pero no las factorías y almacenes intermedios, cuyo emplazamiento debe decidir la programación. Se trata, pues, de estructurar la red de centros intermedios, partiendo de cero (no se conoce todavía la red), o bien de reestructurar una red ya existente, suprimiendo y/o agregando centros en ella (problema de localización). En este caso, podemos clasificar los datos en dos categorías:

a) Datos que son niveles medios esperados a largo plazo para ciertas variables, tales como la demanda en cada centro de consumo, los costes unitarios de producción en origen y los costes unitarios de transporte. Estos datos son, en general, independientes de la política de localización de centros intermedios.

b) Parámetros que están relacionados con la política de localización de centros intermedios, como son la capacidad y el coste unitario de cada uno de dichos centros. En rigor, estos parámetros deberían considerarse como incógnitas y no como datos, habida cuenta de su relación con las incógnitas. Sin embargo, cuando se aplican los modelos de transporte a la localización, no siempre es posible proceder así, a causa de dificultades operativas.

El propósito de este artículo es, esencialmente, estudiar la localización y dimensión óptima, bajo el objetivo de minimización de costes, que es el usual en la programación a largo plazo, en empresas distribuidoras de leche. Partiendo de una introducción metodológica, donde se exponen algunas relaciones conocidas entre localización y dimensión, se sigue el procedimiento de las variables enteras bivalentes (programa lineal en números enteros) a fin de determinar conjuntamente las políticas de dimensión y localización óptima.

2. DIMENSION Y LOCALIZACION OPTIMA

Una decisión errónea al dimensionar una planta conduce a incrementos en los costes de producción, y lo mismo ocurre en cuanto a las decisiones no óptimas en la localización de la planta, por efecto del aumento en los costes de transporte; en ambos casos, se perjudica la competitividad de la empresa, sin que los errores puedan corregirse fácilmente por tratarse de inversiones a largo plazo.

La temática de localización está ampliamente tratada en la literatura; por lo general, se opera con modelos que abordan el problema, ya de modo independiente, ya en conexión con la dimensión óptima.

Dentro del campo de la teoría de la localización es obligado citar a Weber, aun cuando no puede considerarse como iniciador de la teoría, de la cual se ocuparon con anterioridad Von Thünen (1826) y Launhardt (1882), ya que, sin duda, es el primero que la sistematiza modélicamente en el ámbito de la empresa.

Weber admitía que el coste de transporte era prácticamente el único factor que influye en la localización, aun cuando en sus modelos pueden introducirse los costes de mano de obra, energía y materias primas, asimilándoles a costes de transporte. Las economías externas son tocadas por Weber bajo la forma del factor "aglomeración"; en realidad, algunas de las ventajas de la aglomeración, como la existencia de proveedores en un radio cercano a la planta, quedan incluidas en el modelo de localización weberiano, que considera a la vez mercados y fuentes de aprovisionamiento. Sin embargo, hay factores de aglomeración que no podrían tratarse de modo directo dentro del modelo weberiano más simple, como son las economías debidas a la urbanización, etc., y también en cuanto a ciertos gastos de ventas. Para Weber, el punto de localización óptima corresponde al coste mínimo de transporte. Este planteamiento daba origen al "triángulo de Weber", para el caso de dos inputs y un solo output. Los modelos de Weber no tienen en cuenta ciertas variaciones espaciales de la demanda y de los costes de producción.

Otras aportaciones a la teoría de la localización se deben a Predöhls, Palander, Hoover y Cooper, que continúan en la línea de Weber.

Posteriormente, se advirtió la necesidad de conceder mayor atención a factores tales como los salarios, los costes de las materias primas y los costes de instalación de la planta, que varían obviamente según el punto de localización, además de los costes de transporte. Ello llevó a otros modelos, también bajo el objetivo de minimización de los costes totales unitarios, incluyendo los anteriores conceptos.

Por otra parte, no podía ignorarse la acción de las empresas competidoras. Sin embargo, Lösch elabora una teoría de la localización, suponiendo no sólo que existen diferencias espaciales de precios en los recursos productivos (mano de obra y capital) y que la demanda varía con la distancia (para ello, supuso densidades de población uniformes e iguales rentas "per capita"), sino también que las empresas que han de competir en el mercado se hallan muy distantes unas de otras en términos espaciales, por lo cual cada una de ellas no sufre los efectos de las empresas competidoras. Haciendo un análisis de las diferentes teorías sobre localización, Lösch [5, pág. 28], refiriéndose tanto a las políticas de localización de coste mínimo como de ingreso máximo, opina que no pueden considerarse adecuadas, y sólo reconoce como objetivo "correcto" el de optimización del beneficio.

Sin embargo, el objetivo de maximización del beneficio propuesto por Lösch, quizá no resulte el más adecuado para una programación a largo plazo, como es el caso de la localización y dimensión óptima. En efecto, como dice Romero [7, págs. 76-77], el beneficio es función de los ingresos, que a su vez dependen del precio del output. Por otro lado, el precio del output está sujeto a fuerte incertidumbre en un horizonte a largo plazo, seguramente en mayor medida que el coste. Si el empresario decide la dimensión y localización de su planta atendiendo a un criterio de máximo beneficio, puede ocurrir que, aun actuando en un primer momento como monopolista en el área donde ubique la planta, pierde pronto esta situación por instalarse un competidor dentro de su radio de acción comercial; y como el punto de máximo beneficio no coincide, en general, con el de mínimo coste unitario, se encontrará en una situación desventajosa frente al nuevo competidor, si éste fija la dimensión de su planta según el criterio del coste mínimo.

Frente a estos modelos, en los que se estudia, de hecho, el comportamiento óptimo de una empresa monopolística, Hotelling (1929) construyó un modelo para situaciones de duopolio dentro de unos supuestos simplificadores.

Isard sintetiza las teorías existentes hasta el momento y construye un modelo sencillo bajo el objetivo de minimización de costes, aunque algo más sofisticado en cuanto al tratamiento de los costes de transporte. Los planteamientos de Isard, como los de Lösch, dentro ya de una teoría espacial muy elaborada, se orientan al ordenamiento geográfico de toda la actividad económica.

Los modelos anteriores desconocen todavía las variaciones espaciales de la demanda. En la siguiente fase de desarrollo de la teoría espacial se han generalizado los modelos de maximización de beneficio que, no obstante, tropiezan con ciertas dificultades debidas a la presencia de variables no bien cuantificables en la política de localización. A este respecto dice Richardson [6, pág. 99]:

«Es evidente que las teorías de la localización basadas en la hipótesis de maximización del beneficio necesitan, para poder formularse, un gran número de supuestos simplificadores. La decisión locacional se presta, en mayor medida que las restantes decisiones empresariales, a ser interpretada de manera que se tengan en cuenta influencias tales como la "renta psíquica" y otros factores de tipo personal que no son fácilmente compatibles con las nociones de racionalidad económica.»

Las investigaciones actuales dentro del marco de la teoría de la localización han llevado a introducir, junto a los objetivos clásicos (minimización de costes, maximización de ingresos o de beneficios), otras políticas posibles, como la maximización de las ventas y la optimización del beneficio bajo restricciones de riesgo. El desarrollo de las técnicas de investigación operativa (especialmente las programaciones lineal y no lineal, así como los grafos) han permitido aplicarlas con éxito a dichos problemas.

En cuanto a dimensión óptima, no existe un criterio único para su definición, ya que pueden usarse, en principio, varios parámetros como índices de tamaño.

Como dice Romero [7], la dimensión óptima de la empresa depende de los móviles del empresario, teniéndose, entre otros, estos distintos conceptos de dimensión óptima:

a) Dimensión que maximiza el beneficio.

b) Dimensión que maximiza el volumen de ventas.

c) Dimensión que maximiza el beneficio pero de forma tal que el índice de riesgo no sobrepase cierto límite.

d) Dimensión que minimiza el coste total unitario.

Localización y dimensión óptima son dos problemas interrelacionados. Se trata de políticas conexas, que tienen que decidirse de manera conjunta. Como dice Fernández Pirla [3, pág. 135]:

"Otra parte de la doctrina ha ampliado la consideración del problema al ocuparse también de otros factores locacionales, de los costes totales de la empresa (buscando la minimización de éstos) y de los rendimientos, planteamiento que ha llevado a su vez a considerar interrelacionado el problema de la localización con el de la dimensión de la empresa y de los costes, ya que una mayor dimensión permite una mayor producción y un menor coste, con lo que se aumenta la influencia espacial de la empresa."

Se puede plantear el problema de si la relación que existe entre los óptimos de dimensión y de localización puede reducirse, en términos operativos, a una ordenación lineal (en el sentido de que quepa calcular primero la dimensión óptima, para pasar después a decidir la localización óptima, o a la inversa), o si hay interrelaciones entre ambos óptimos tan importantes que impiden seguir una lógica de inducción lineal en el planteamiento y resolución de una y otra política. Después de tratar este problema, a la vista de un ejemplo concreto, Ballestero [2, pág. 381] dice:

"Localización y dimensión óptima se presentan así como problemas interdependientes. En rigor, ninguno de ellos se puede resolver antes que el otro; habría que plantearlos a la vez dentro de un mismo modelo."

Otra cuestión es el método más adecuado para abordar el problema de la interdependencia entre dimensión óptima y localización. Sobre este particular comenta Richardson [6, pág. 75]:

"Para resolver de forma simultánea los problemas de localización y de dimensión óptima, tendríamos que usar curvas multidimensionales que nos indicasen las variaciones de la producción, así como los cambios locacionales. Esto es debido a que, dado que la curva espacial de costes es una curva de equiproducto, el ámbito de planteamiento que incluya el coste marginal e ingreso marginal es muy limitado."

Con el procedimiento propuesto por Richardson, puede llegarse fácilmente a la determinación conjunta de ambas políticas, con resultados que, en general, no tienen por qué coincidir con los que habríamos obtenido de no haber tenido en cuenta la interdependencia existente entre dichas políticas.

3. EL MODELO DE TRANSPORTE, ADAPTADO A LA LOCALIZACION Y DIMENSION OPTIMA

Los modelos de transporte (y sus generalizaciones), aunque pensamos en principio para la consecución de políticas óptimas a corto plazo en la empresa, pueden utilizarse para investigar la localización y dimensionamiento óptimo de plantas industriales. La literatura sobre el particular es abundante. Sin embargo, las políticas de localización y dimensionamiento son a largo plazo, por lo que un modelo de transporte muy simplificado (como el de Hitchcock) puede ser preferible a un modelo generalizado, que refleje una estructura cambiante a lo largo del tiempo. Además, la relación que existe entre localización y dimensión óptima complica el problema, ya que el análisis de dimensión óptima no se reduce fácilmente a planteamientos lineales, si tenemos en cuenta que el coste unitario de producción para una planta industrial depende del tamaño de la planta. Como el coste unitario de producción es un parámetro en los modelos de transporte generalizados (modelos de distribución comercial) resulta obviamente que se pierde la linealidad del modelo. Sin embargo, esta dificultad se salva mediante rodeos.

El problema se plantea así: Una empresa dispone de m centros de origen que producen una cierta materia prima, la cual se elaborará en distintos centros de transformación para abastecer la demanda de n centros consumidores. La empresa ha de decidir el número, tamaño y localización de los centros de transformación. Existen p posibles lugares de ubicación para estos centros. El tamaño de cada centro de transformación se elegirá entre las q dimensiones con que pueden proyectarse, en principio, las plantas transformadoras, atendiendo a un objetivo de minimización de costes.

Este problema puede reducirse a un programa lineal en números enteros, como veremos a continuación.

Supongamos primero que queremos imponer una restricción para el tamaño de cierto centro k, bien obligando a que la dimensión de k sea igual a A, bien obligando a que esté comprendida entre dos dimensiones determinadas B y C. Tendremos entonces las restricciones (*):

$$U_k = A$$

para el primer caso y (1)

$$B \leq U_k \leq C$$

para el segundo caso.

Con el fin de adaptar el modelo a la localización, introducimos la programación en números enteros, escribiendo (1) del siguiente modo:

$$U_k = A\,\alpha$$

$$B\,\alpha \leq U_k \leq C\,\alpha \tag{2}$$

siendo α = número entero y además $0 \leq \alpha \leq 1$.

Por tanto, si la variable α toma el valor 0, la dimensión U_k es nula (no se localizará, pues, ninguna planta en k), mientras que si α toma el valor 1, se localizará una planta en k con una dimensión $U_k = A$ en el primer caso, o U_k comprendida entre B y C, en el segundo.

En un planteamiento puro de localización (abstracción hecha de la dimensión óptima), se consideran como posible p centros; pero si combinamos ambos planteamientos de localización y dimensión óptima, admitiremos que esos p centros pueden existir con q diferentes dimensiones. La introducción conjunta de ambas políticas modifica el número de posibles centros de transformación, que son ahora $Z = p \times q$. Según esto, en cada posible punto de localización pueden existir factorías de distintas dimensiones. La solución del programa lineal nos dice cuáles de estos Z deben seleccionarse. Por consiguiente, nos informa a la vez sobre la dimensión y la localización de los centros.

Como consecuencia de este nuevo enfoque, la restricción

$$U_k \leq S_k \tag{3}$$

(*) La notación empleada puede verse en el artículo "Los coeficientes de seguridad del profesor Ballestero en modelos de transporte: una solución semiempírica". REVISTA ECONOMIA POLITICA, núm. 76 [1].

se transforma en:

$$\alpha_k \, l'_k \leq U_k \leq \alpha_k \, l_k \qquad k = 1, 2, \ldots, z \tag{4}$$

siendo α_k = número entero.

$$0 \leq \alpha_k \leq 1$$

con lo que si α_k toma el valor 0, el centro k no se selecciona, mientras que si α_k toma el valor 1, el centro k se selecciona y se verifica:

$$l'_k \leq U_k \leq l_k \tag{5}$$

La función objetivo del programa lineal cambia también algo si los costes unitarios totales de producción de los centros son distintos. En caso contrario, puede mantenerse la misma función objetivo.

Si los costes unitarios totales de producción son diferentes según el lugar y tamaño de las plantas, en la función objetivo habrá que introducir los términos:

$$\sum_{k=1}^{z} T_k \, \alpha_k \, U_k \tag{6}$$

donde:

T_k = Coste unitario total de producción en el centro k.
α_k = Coeficiente entero que ya hemos definido en las restricciones del programa.

Estos nuevos términos sustituirán a la componente

$$\sum_{k=1}^{h} T_k \; U_k \tag{7}$$

de la función objetivo del modelo de distribución comercial.

4. LOCALIZACION Y DIMENSION EN LA DISTRIBUCION DE LECHE

Aplicamos esta metodología al caso de empresas españolas en el sector de distribución de leche. En este sector se suelen concertar contratos de duración ilimitada en los que la empresa distribuidora se compromete a abastecer de leche homogeneizada a diversos centros de consumo. Las distribuidoras se abastecen en varios centros de producción, situados en la misma zona geográfica de los centros de consumo y con capacidad suficiente para abastecer dichos centros. Antes de decidir la dimensión y localización de las plantas transformadoras suelen hacerse estudios técnicos que dan como resultado la selección de algunos puntos de posible localización, así como distintas dimensiones posibles para las plantas transformadoras.

Se trata de establecer una política óptima para este tipo de empresas, planificando:

a) Cantidad de leche natural a enviar desde cada centro productor a cada planta transformadora, en un programa a largo plazo que considera cantidades medias en función de las expectativas de producción y consumo.
b) Cantidad de leche homogeneizada a enviar desde cada planta transformadora a cada centro de consumo, dentro del mismo programa.
c) Ubicación de las plantas transformadoras.
d) Dimensión de las citadas plantas.
e) Cantidad de leche a homogeneizar en cada planta.

Se han de satisfacer determinadas restricciones, y el objetivo es minimizar el coste conjunto de transformación, transporte, almacenamiento y localización, que se origina en el proceso.

Puesto que una generalización, en el sentido de operar con variables simbólicas, se haría imposible en términos ilustrativos, concretaremos el caso de una empresa distribuidora con las siguientes características:

Número de centros productores: 3.

Número de posibles puntos de ubicación: 2.

Número de dimensiones posibles: 3.

Número de centros de consumo: 3.

A los centros productores se les designa por 1, 2, 3.

A los posibles puntos de localización de las plantas se les llama A, B, y a las dimensiones que pueden tener las plantas se les denomina θ_1, θ_2 y θ_3, lo que permite la introducción de $2 \times 3 = 6$ nuevas variables a, b, c, d, e, f, que corresponden, respectivamente, a:

a) (Planta localizada en A y de dimensión θ_1).
b) (Planta localizada en A y de dimensión θ_2).
c) (Planta localizada en A y de dimensión θ_3).

d) (Planta localizada en B y de dimensión θ_1).
e) (Planta localizada en B y de dimensión θ_2).
f) (Planta localizada en B y de dimensión θ_3).

A los centros de consumo se les designa por 1, 2, 3.

En la matriz A, de dimensión 1×3, figuran las cantidades medias de leche natural (en miles de litros) que los centros productores suministran a las plantas embotelladoras, siendo el elemento a_i la cantidad media de leche natural que hay que retirar del centro productor i.

$$A = | 55 \quad 48 \quad 63 |$$

Al tratarse de un nuevo contrato se supone que no existen *stocks* de leche natural y homogeneizada ni en las plantas transformadoras ni en los centros de consumo.

En la matriz B, de dimensión 1×3, figuran las demandas medias de leche homogeneizada (en miles de litros) de los centros de consumo, representando el elemento b_j la demanda media de leche homogeneizada en el centro de consumo j.

$$B = | 45 \quad 57 \quad 50 |$$

En la matriz Z, de dimensión 1×6, figuran las capacidades máximas de transformación (en miles de litros) en las diferentes plantas. El elemento z_k representa la capacidad máxima de transformación de la planta k.

$$Z = | 55 \quad 80 \quad 125 \quad 55 \quad 80 \quad 125 |$$

En la matriz Z', de dimensión 1×6, figuran las capacidades mínimas de transformación (en miles de litros) en las distintas plantas. El elemento z'_k representa la capacidad mínima de transformación de la planta k.

$$Z' = | 40 \quad 65 \quad 105 \quad 40 \quad 65 \quad 105 |$$

En la matriz L, de dimensión 1×6, figuran las capacidades de almacenamiento de leche natural (en miles de litros) en las plantas transformadoras, siendo l_k la cantidad máxima de leche natural que puede almacenarse en la planta k.

$$L = | 3 \quad 4 \quad 5 \quad 3 \quad 4 \quad 5 |$$

En la matriz L', de dimensión 1×6, figuran las capacidades de almacenamiento de leche homogeneizada (en miles de litros) en las plantas transformadoras, siendo l'_k la cantidad máxima de leche homogeneizada que puede almacenarse en la planta k.

$$L' = | 4 \quad 5 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 6 |$$

En la matriz L'', de dimensión 1×3, figuran las capacidades de almacenamiento de leche homogeneizada (en miles de litros) en los centros de consumo. El elemento l''_j representa la capacidad de almacenamiento de leche homogeneizada en el centro j.

$$L''_j = | 5 \quad 9 \quad 8 |$$

En la matriz I figuran los coeficientes técnicos de transformación de leche natural en leche homogeneizada, siendo i_k el coeficiente de transformación de leche natural en leche homogeneizada en el centro k.

$$I = | 0{,}970 \quad 0{,}975 \quad 0{,}978 \quad 0{,}970 \quad 0{,}975 \quad 0{,}978 |$$

Los costes de transporte de leche natural (ptas./Hl.), desde los centros productores a las plantas transformadoras vienen expresados en la matriz C, de dimensión 3×6, siendo c_{ik} el coste de transporte unitario desde el centro productor i a la planta transformadora k.

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 166{,}045 & 166{,}045 & 166{,}045 \\ 166{,}045 & 166{,}045 & 166{,}045 & 0 & 0 & 0 \\ 135{,}570 & 135{,}570 & 135{,}570 & 178{,}840 & 178{,}840 & 178{,}840 \end{vmatrix}$$

Los costes de transporte de leche homogeneizada (ptas./Hl.) desde las plantas transformadoras a los centros de consumo se expresan en la matriz C', de dimensión 6×3, siendo c'_{kj} el coste de transporte unitario desde la planta k al centro de consumo j.

$$C' = \begin{vmatrix} 158{,}17 & 0 & 185{,}09 \\ 158{,}17 & 0 & 185{,}09 \\ 158{,}17 & 0 & 185{,}09 \\ 208{,}65 & 185{,}09 & 0 \\ 208{,}65 & 185{,}09 & 0 \\ 208{,}65 & 185{,}09 & 0 \end{vmatrix}$$

Los costes unitarios de almacenamiento de leche natural (en ptas./Hl.) en las plantas transformadoras figuran en la matriz G, de dimensión 1×6, siendo g_k el coste unitario de almacenamiento en la planta k.

$$G = | \ 18{,}50 \quad 18{,}25 \quad 18{,}20 \quad 18{,}50 \quad 18{,}25 \quad 18{,}20 \ |$$

Los costes unitarios de almacenamiento de leche homogeneizada (en pesetas/Hl.) en los almacenes de las plantas embotelladoras figuran en la matriz H, de dimensión 1×6, siendo h_k el coste unitario de almacenamiento en la planta k.

$$H = | \ 19{,}50 \quad 19{,}35 \quad 19{,}20 \quad 20{,}50 \quad 20{,}25 \quad 20{,}20 \ |$$

Los costes unitarios de almacenamiento de leche homogeneizada (en pesetas/Hl.) en los almacenes de los centros de consumo figuran en la matriz M, de dimensión 1×3, siendo m_j el coste unitario de almacenamiento en el centro j.

$$M = | \ 21{,}30 \quad 21{,}20 \quad 21{,}10 \ |$$

Los costes unitarios totales de transformación (en ptas./Hl.) figuran en la matriz N, de dimensión 1×6, siendo n_k el coste unitario de transformación en la planta k.

$$N = | \ 126{,}1 \quad 99{,}2 \quad 90{,}4 \quad 126{,}1 \quad 99{,}2 \quad 90{,}4 \ |$$

Las incógnitas del modelo figuran en la matriz X, de dimensión 3×6. Por tanto, el elemento X_{ik} representa la cantidad de leche natural (en miles de litros) que se debe enviar desde el centro productor i a la planta transformadora k.

$$X = \begin{vmatrix} X_{1a} & X_{1b} & X_{1c} & X_{1d} & X_{1e} & X_{1f} \\ X_{2a} & X_{2b} & X_{2c} & X_{2d} & X_{2e} & X_{2f} \\ X_{3a} & X_{3b} & X_{3c} & X_{3d} & X_{3e} & X_{3f} \end{vmatrix}$$

En la matriz Y, d dimensión 6×3, figuran las cantidades de leche homogeneizada (en miles de litros) que deben ser enviadas desde las plantas embotelladoras a los centros de consumo. Por tanto, el elemento Y_{kj} representa la cantidad de leche homogeneizada que se debe enviar desde la planta k al centro de consumo j.

$$Y = \begin{vmatrix} Y_{a1} & Y_{a2} & Y_{a3} \\ Y_{b1} & Y_{b2} & Y_{b3} \\ Y_{c1} & Y_{c2} & Y_{c3} \\ Y_{d1} & Y_{d2} & Y_{d3} \\ Y_{e1} & Y_{e2} & Y_{e3} \\ Y_{f1} & Y_{f2} & Y_{f3} \end{vmatrix}$$

En la matriz U, de dimensión 1×6, figuran las cantidades de leche natural (en miles de litros) que deben homogeneizarse en cada planta. Por tanto, el elemento U_k representa la cantidad de leche que se debe homogeneizar en la planta k.

$$U = | U_a \quad U_b \quad U_c \quad U_d \quad U_e \quad U_f |$$

Las condiciones que se deben cumplir son:

1.° La cantidad de leche natural a enviar desde cada centro productor al conjunto de las plantas transformadoras debe coincidir con la cantidad que la empresa se comprometió a retirar de los centros productores. Por tanto:

$$\begin{aligned} X_{1a} + X_{1b} + X_{1c} + X_{1d} + X_{1e} + X_{1f} &= 55 \\ X_{2a} + X_{2b} + X_{2c} + X_{2d} + X_{2e} + X_{2f} &= 48 \\ X_{3a} + X_{3b} + X_{3c} + X_{3d} + X_{3e} + X_{3f} &= 63 \end{aligned} \tag{22}$$

2.° La cantidad de leche natural que se homogeniza en cada planta no puede superar a las cantidades recibidas desde los centros productores. Por tanto:

$$\begin{aligned} U_a &\leq X_{1a} + X_{2a} + X_{3a} \\ U_b &\leq X_{1b} + X_{2b} + X_{3b} \\ U_c &\leq X_{1c} + X_{2c} + X_{3c} \\ U_d &\leq X_{1d} + X_{2d} + X_{3d} \\ U_e &\leq X_{1e} + X_{2e} + X_{3e} \\ U_f &\leq X_{1f} + X_{2f} + X_{3f} \end{aligned} \tag{23}$$

3.º La cantidad de leche homogeneizada que se envía desde cada planta a los centros de consumo no puede superar a la cantidad de leche natural que se transforma:

$$\begin{aligned} Y_{a1} + Y_{a2} + Y_{a3} &\leq U_a \cdot 0{,}970 \\ Y_{b1} + Y_{b2} + Y_{b3} &\leq U_b \cdot 0{,}975 \\ Y_{c1} + Y_{c2} + Y_{c3} &\leq U_c \cdot 0{,}978 \\ Y_{d1} + Y_{d2} + Y_{d3} &\leq U_d \cdot 0{,}970 \\ Y_{e1} + Y_{e2} + Y_{e3} &\leq U_e \cdot 0{,}975 \\ Y_{f1} + Y_{f2} + Y_{f3} &\leq U_f \cdot 0{,}978 \end{aligned} \qquad (24)$$

4.º La cantidad de leche homogeneizada que se envía desde las plantas a cada centro consumidor ha de ser mayor o igual que la demanda de dicho centro:

$$\begin{aligned} Y_{a1} + Y_{b1} + Y_{c1} + Y_{d1} + Y_{e1} + Y_{f1} &\geq 45 \\ Y_{a2} + Y_{b2} + Y_{c2} + Y_{d2} + Y_{e2} + Y_{f2} &\geq 57 \\ Y_{a3} + Y_{b3} + Y_{c3} + Y_{d3} + Y_{e3} + Y_{f3} &\geq 50 \end{aligned} \qquad (25)$$

5.º La cantidad de leche homogeneizada en cada planta no puede superar la capacidad de cada una de ellas, si es que dicha planta existe:

$$\begin{aligned} 40\ \alpha_1 \leq \mathrm{U}_a &\leq 55\ \alpha_1 \\ 65\ \alpha_2 \leq \mathrm{U}_b &\leq 80\ \alpha_2 \\ 105\ \alpha_3 \leq \mathrm{U}_c &\leq 125\ \alpha_3 \\ 40\ \alpha_4 \leq \mathrm{U}_d &\leq 55\ \alpha_4 \\ 65\ \alpha_5 \leq \mathrm{U}_e &\leq 80\ \alpha_5 \\ 105\ \alpha_6 \leq \mathrm{U}_f &\leq 125\ \alpha_6 \end{aligned} \qquad (26)$$

siendo $0 \leq \alpha_i \leq 1$ y $\alpha_i =$ número entero $i = 1, 2, \ldots, 6$.

6.º La cantidad de leche natural que se almacena en cada planta no debe superar la capacidad de almacenamiento de dicha planta.

$$\begin{aligned} X_{1a} + X_{a2} + X_{3a} - U_a &\leq 3 \\ X_{1b} + X_{2b} + X_{3b} - U_b &\leq 4 \\ X_{1c} + X_{2c} + X_{3c} - U_c &\leq 5 \\ X_{1d} + X_{2d} + X_{3d} - U_d &\leq 3 \\ X_{1e} + X_{2e} + X_{3e} - U_e &\leq 4 \\ X_{1f} + X_{2f} + X_{3f} - U_f &\leq 5 \end{aligned} \qquad (27)$$

7.° Las cantidades de leche homogeneizada que se almacenan en cada planta no pueden superar las capacidades de almacenamiento de dichas plantas:

$$
\begin{aligned}
&U_a - Y_{a1} - Y_{a2} - Y_{a3} \leq 4 \\
&U_b - Y_{b1} - Y_{b2} - Y_{b3} \leq 5 \\
&U_c - Y_{c1} - Y_{c2} - Y_{c3} \leq 6 \\
&U_d - Y_{d1} - Y_{d2} - Y_{d3} \leq 4 \\
&U_e - Y_{e1} - Y_{e2} - Y_{e3} \leq 5 \\
&U_f - U_{f1} - Y_{f2} - Y_{f3} \leq 6
\end{aligned}
\qquad (28)
$$

8.° Las cantidades de leche homogeneizada que se almacenan en cada centro consumidor no pueden exceder de sus capacidades de almacenamiento.

$$
\begin{aligned}
&Y_{a1} + Y_{b1} + Y_{c1} + Y_{d1} + Y_{e1} + Y_{f1} - 45 \leq 5 \\
&Y_{a2} + Y_{b2} + Y_{c2} + Y_{d2} + Y_{e2} + Y_{f2} - 57 \leq 9 \\
&Y_{a3} + Y_{b3} + Y_{c3} + Y_{d3} + Y_{e3} + Y_{f3} - 50 \leq 8
\end{aligned}
\qquad (29)
$$

La función objetivo, en este caso función de costes, vendrá dada por la suma de todos los costes que se originan en el proceso y que son:

a) Costes de transporte de leche natural a las plantas transformadoras:

$$
\begin{aligned}
&1660{,}45\ X_{1d} + 1660{,}45\ X_{1e} + 1660{,}45\ X_{1f} + 1660{,}45\ X_{2a} + \\
&+ 1660{,}45\ X_{2b} + 1660{,}45\ X_{2c} + 1355{,}70\ X_{3a} + 1355{,}70\ X_{3b} + \\
&+ 1355{,}70\ X_{3c} + 1788{,}40\ X_{3d} + 1788{,}40\ X_{3e} + 1788{,}40\ X_{3f}.
\end{aligned}
\qquad (30)
$$

b) Costes de transporte de leche homogeneizada desde las plantas transformadoras a los centros de consumo:

$$
\begin{aligned}
&1581{,}70\ Y_{a1} + 1850{,}90\ Y_{a3} + 1581{,}70\ Y_{b1} + 1850{,}90\ Y_{b3} + \\
&+ 1581{,}70\ Y_{c1} + 1850{,}90\ Y_{c3} + 2086{,}50\ Y_{d1} + 1850{,}90\ Y_{d2} + \\
&+ 2086{,}50\ Y_{e1} + 1850{,}90\ Y_{e2} + 2086{,}50\ Y_{f1} + 1850{,}90\ Y_{f2}.
\end{aligned}
\qquad (31)
$$

c) Costes de transformación:

$$
\begin{aligned}
&1261\ U_a \alpha_1 + 992\ U_b \alpha_2 + 904\ U_c \alpha_3 + \\
&1261\ U_d \alpha_4 + 992\ U_e \alpha_5 + 904\ U_f \alpha_6.
\end{aligned}
\qquad (32)
$$

d) Costes de almacenamiento de leche natural en las plantas transformadoras:

$$
\begin{aligned}
&185\ [X_{1a} + X_{2a} + X_{3a} - U_a\,\alpha_1] + 182{,}5\,[X_{1b} + X_{2b} + X_{3b} - U_b\,\alpha_2]\ + \\
&182\ [X_{1c} + X_{2c} + X_{3c} - U_c\,\alpha_3] + 185\ [X_{1d} + X_{2d} + X_{3d} - U_d\,\alpha_4]\ + \\
&182{,}5\,[X_{1e} + X_{2e} + X_{3e} - U_e\,\alpha_5] + 182\ [X_{1f} + X_{2f} + X_{3f} - U_f\,\alpha_6]. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

e) Costes de almacenamiento de leche homogeneizada en las plantas transformadoras:

$$
\begin{aligned}
&195\ [0{,}97\,U_a\,\alpha_1 - Y_{a1} - Y_{a2} - Y_{a3}]\ + \\
&+\ 193{,}5\ [0{,}975\,U_b\,\alpha_2 - Y_{b1} - Y_{b2} - Y_{b3}]\ + \\
&+\ 192{,}4\ [0{,}978\,U_c\,\alpha_3 - Y_{c1} - Y_{c2} - Y_{c3}]\ + \\
&+\ 205\ [0{,}97\,U_d\,\alpha_4 - Y_{d1} - Y_{d2} - Y_{d3}]\ + \\
&+\ 202{,}5\ [0{,}975\,U_e\,\alpha_5 - Y_{e1} - Y_{e2} - Y_{e3}]\ + \\
&+\ 202\ [0{,}978\,U_f\,\alpha_6 - Y_{f1} - Y_{f2} - Y_{f3}].
\end{aligned}
\qquad (34)
$$

f) Coste de almacenamiento de leche homogeneizada en los centros de consumo:

$$
\begin{aligned}
&213\ [Y_{a1} + Y_{b1} + Y_{c1} + Y_{d1} + Y_{e1} + Y_{f1} - 45]\ + \\
&+\ 212\ [Y_{a2} + Y_{b2} + Y_{c2} + Y_{d2} + Y_{e2} + Y_{f2} - 57]\ + \\
&+\ 211\ [Y_{a3} + Y_{b3} + Y_{c3} + Y_{d3} + Y_{e3} + Y_{f3} - 50].
\end{aligned}
\qquad (35)
$$

g) Los costes totales se obtienen por la suma de los costes anteriores:

$$
\begin{aligned}
&185\ X_{1a} + 182{,}5\ X_{1b} + 182\ X_{1c} + 1845{,}45\ X_{1d} + 1842{,}95\ X_{1e}\ + \\
&+\ 1842{,}5\,X_{1f} + 1845{,}45\,X_{2a} + 1842{,}95\,X_{2b} + 1842{,}45\,X_{2c} + 185\,X_{2d}\ + \\
&+\ 182{,}5\,X_{2e} + 182\,X_{2f} + 1538{,}7\,X_{3a} + 1536{,}2\,X_{3b} + 1535{,}7\,X_{3c}\ + \\
&+\ 1973{,}4\,X_{3d} + 1970{,}9\,X_{3e} + 1970{,}4\,X_{3f} + 1599{,}7\,Y_{a1} + 17\,Y_{a2}\ + \\
&+\ 1866{,}9\,Y_{a3} + 1601{,}2\,Y_{b1} + 18{,}5\,Y_{b2} + 1868{,}4\,Y_{b3} + 1602{,}7\,Y_{c1}\ + \\
&+\ 20\,Y_{c2} + 1869{,}9\,Y_{c3} + 2097{,}5\,Y_{d1} + 1860{,}9\,Y_{d2} + 6\ Y_{d3}\ + \\
&+\ 2097\,Y_{e1} + 1860{,}4\,Y_{e2} + 8{,}5\,Y_{e3} + 2097{,}5\,Y_{f1} + 1860{,}9\,Y_{f2}\ + \\
&+\ 9\,Y_{f3} + \alpha_1\,[1265{,}13\,U_a] + [998{,}16\,U_b]\,\alpha_2 + [909{,}78\,U_c]\,\alpha_3\ + \\
&+\ [1274{,}85\,U_d]\,\alpha_4 + [1007{,}43\,U_e]\,\alpha_5 + [919{,}556\,U_f]\,\alpha_6 - 32.219. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

El objetivo es organizar la producción en sus diferentes fases, así como determinar la localización de las plantas con una dimensión óptima, de forma que los costes totales sean mínimos.

Para ello, minimizaremos la función objetivo (36) sujeta a las restricciones (22) a (29), ambas inclusive.

Esta programación lineal en números enteros fue resuelta en una computadora Control Data Corporation, modelo Ziber 172, obteniéndose los siguientes resultados (en miles de litros):

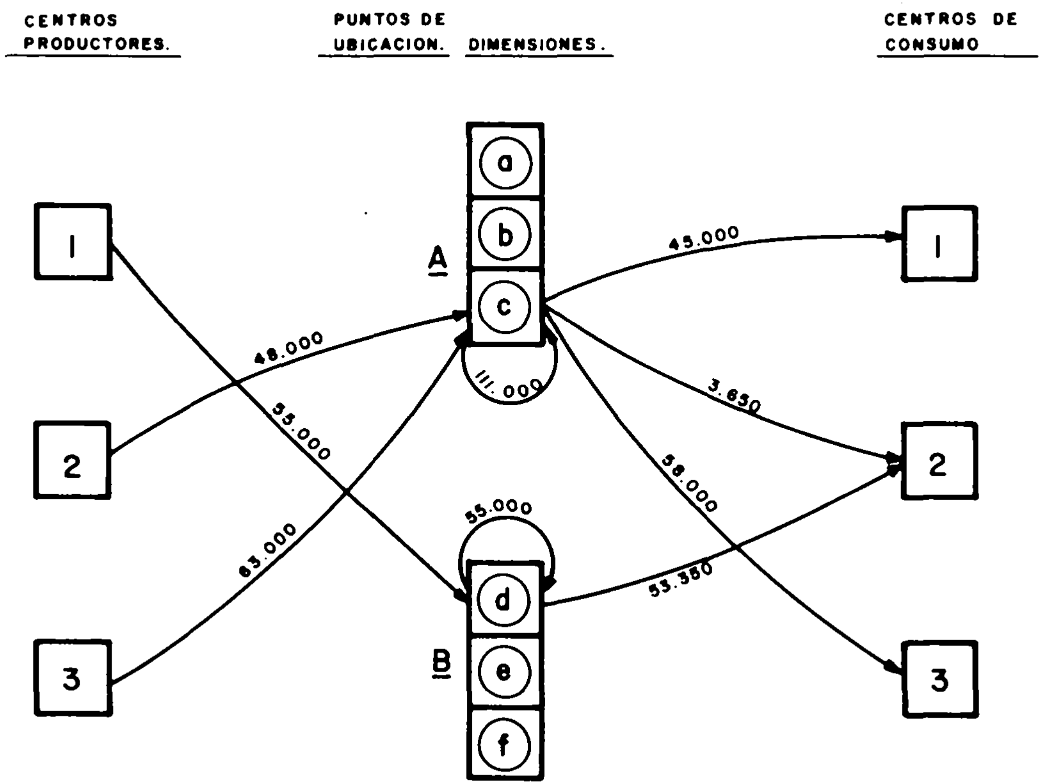
$X_{1a} = 0$	$X_{1d} = 55$
$X_{2a} = 0$	$X_{2d} = 0$
$X_{3a} = 0$	$X_{3d} = 0$
$X_{1b} = 0$	$X_{1e} = 0$
$X_{2b} = 0$	$X_{2e} = 0$
$X_{3b} = 0$	$X_{3e} = 0$
$X_{1c} = 0$	$X_{1f} = 0$
$X_{2c} = 48$	$X_{2f} = 0$
$X_{3c} = 63$	$X_{3f} = 0$
$U_a = 0$	$U_d = 55$
$U_b = 0$	$U_e = 0$
$U_c = 111$	$U_f = 0$
$Y_{a1} = 0$	$Y_{d1} = 0$
$Y_{a2} = 0$	$Y_{d2} = 53{,}35$
$Y_{a3} = 0$	$Y_{d3} = 0$
$Y_{b1} = 0$	$Y_{e1} = 0$
$Y_{b2} = 0$	$Y_{e2} = 0$
$Y_{b3} = 0$	$Y_{e3} = 0$
$Y_{c1} = 45$	$Y_{f1} = 0$
$Y_{c2} = 3{,}65$	$Y_{f2} = 0$
$Y_{c3} = 60{,}13$	$Y_{f3} = 0$
$\alpha_1 = 0$	$\alpha_4 = 1$
$\alpha_2 = 0$	$\alpha_5 = 0$
$\alpha_3 = 1$	$\alpha_6 = 0$

$$Z = 710.184{,}602 \text{ ptas.}$$

Analizando los resultados, se llega a la conclusión de que debe localizarse en *A* una planta transformadora que tenga una capacidad comprendida entre 125.000 y 105.000 litros, y en *B* otra planta con una dimensión comprendida entre 55.000 y 40.000 litros. Con dichas plantas, planificando la distribución comercial de acuerdo con el programa anterior, se consigue un coste mínimo. (Un resumen de los resultados aparece en el gráfico núm. 1.)

GRAFICO Nº1

RESULTADOS DE LA PROGRAMACION



BIBLIOGRAFIA

(1) Alonso Sebastián, R.: *Los coeficientes de seguridad del profesor Ballestero en modelos de transporte: una solución semiempírica.* REVISTA DE ECONOMIA POLITICA, núm. 76, 1977.

(2) Ballestero, E.: *Principios de economía de la empresa.* Alianza Universidad (3.ª ed.), Madrid, 1975.

(3) Fernández Pirla, J.: *Economía y gestión de la empresa,* ICE, Madrid, 1970.

(4) Isard, W.: *Location and Space-Economy.* The Massachusetts Institute of Technology, 1956.

(5) Losch, A.: *Teoría económica espacial.* Ed. El Ateneo, Buenos Aires, 1957.

(6) Richardson, H. W.: *Economía regional. Teoría de la localización, estructuras urbanas y crecimiento regional.* Vicens Vives, 1973.

(7) Romero, C.: *Modelos económicos en la empresa.* Ed. Deusto, 1977.