Cómo un consumidor maximiza la utilidad y sus fundamentos matemáticos

CARLOS CALLEJA XIFRE
Universidad Autónoma de Barcelona

1. *Introducción*

(1.i). El objeto de este ensayo es mostrar cómo un consumidor maximiza la utilidad en sus adquisiciones habituales de bienes de consumo a través de un algoritmo de elección finito (1).

Observando la conducta del consumidor se aprecia que éste revela sus preferencias adquiriendo un conjunto de objetos que se ofrecen en los mercados de bienes de consumo. Por ejemplo: una taza de café, un periódico, una camisa, un automóvil, entre otros, gastando para ello el dinero o renta disponible.

Al adquirir estos objetos el consumidor también revela (condición de equilibrio de Pareto) que los prefiere a todos los demás bienes ofrecidos en el mercado, que no adquiere.

El procedimiento matemático usado por el consumidor para seleccionar los bienes preferidos no se funda, obviamente, en cálculo diferencial. Su fundamento se encuentra en el proceso de ordenar según la relación de preferencia un conjunto finito de bienes o unidades marginales, procedimiento que en este ensayo se denomina algoritmo marginal finito.

Como ya previera Ivor Pearce (2), y según será demostrado en este ensayo, el consumidor, que sigue el procedimiento de selección de bienes de consumo expuesto, maximiza la utilidad con re-

---

(1) La sugerencia para desarrollar la teoría de la elección del consumidor en términos de matemática finita se encuentra en un libro del profesor PEARCE, a quien agradezco su constante interés por este trabajo. También ha sido él quien propuso el problema de la equivalencia de los métodos finitos y continuos que se aborda en la tercera parte.

Agradezco también el interés que han mostrado por este trabajo los profesores HERMAN WOLD, SIXTO RÍOS y ANTONI CASAHUGA.

(2) Ver PEARCE, I. F. [14], pág. 27.

sultados equivalentes a los que podría obtener aplicando el cálculo diferencial por medio de una función de utilidad.

Parte primera: La formalización del algoritmo marginal en términos de una relación de preferencia.

2. *La definición de las unidades marginales*

(2.i). El algoritmo marginal opera por medio de una relación de preferencia entre unidades marginales.

Se entiende por unidad marginal a una cantidad arbitraria y constante de un bien económico aceptada como unidad de consumo por un colectivo de consumidores.

La unidad marginal se simboliza anteponiendo una D mayúscula al tipo de bien. Así, la unidad marginal del bien tipo x es Dx. La unidad marginal del bien tipo y es Dy.

(2.ii). El algoritmo marginal puede desarrollarse indistintamente con unidades marginales pequeñas, o diferenciales, sugeridas por el cálculo diferencial o mediante unidades marginales grandes, sugeridas por el lenguaje hablado, y determinadas por la tecnología del consumo.

Por ejemplo, pueden considerarse unidades marginales los siguientes objetos:

Dx = «una» taza de café.
Dy = «un» periódico.
Dz = «un» automóvil.
Du = «una» camisa.
Dv = «un» bistec de ternera.
Dw = «una» entrada para una función de teatro.

(2.iii). Algunas de esas unidades marginales (periódico, automóvil, camisa) son objetos creados por el hombre que constituyen una estructura que no puede dividirse sin disminuir o anular sus propiedades útiles. Por tanto, el consumidor está interesado en consumirlas en unidades enteras.

Otras unidades marginales (café, bistec, tela) pueden dividirse hasta ciertos límites (3). Sin embargo, aunque las cantidades pe-

(3) Ver SAMUELSON, P. A. [15], pág. 373. Ver también PARETO, W. [13], capítulo III, párrafo 65, págs. 172 a 174.

queñas mantienen sus propiedades útiles, tanto los hábitos de consumo como las prácticas de *marketing* (envasado, embotellaje, embalaje) muestran que su consumo se efectúa también en cantidades grandes, determinadas por la naturaleza del hombre y transmitidas culturalmente mediante al aprendizaje de la tecnología del consumo.

Así, el café se consume en tazas, el bistec en cantidades que oscilan entre 50 y 200 gramos de ternera y la tela se usa según los patrones tecnológicos de la industria de la confección.

(2.iv). Los precios de mercado, o cantidades de dinero ($) que se pagan por unidades de cada tipo de bien, se enuncian en unos casos por medio de las unidades marginales de consumo (por un automóvil, un periódico o una camisa) y en otros casos indistintamente en unidades físicas (kilo, metro o litro) y en unidades discretas (una taza de café, un filete de ternera).

(2.v). La expresión unidad marginal puede significar tanto una cantidad de un bien como la medida de esta cantidad en la unidad de mercado. Por el contexto del argumento se puede identificar a cuál de los dos significados se refiere.

3. *La relación de preferencia entre unidades marginales*

(3.i). Un consumidor es capaz siempre de relacionar dos unidades marginales de acuerdo con una relación de preferencia débil ($\geqslant$) que permite la preferencia fuerte ($>$) o la relación de indiferencia ($\sim$) (4).

(3.ii). Ley de tricotomía: Para todo par de unidades marginales, por ejemplo, las unidades Dx y Dy, el consumidor puede establecer las siguientes relaciones:

$$(\text{ó}) \quad Dx > Dy \qquad (\text{ó}) \quad Dx \sim Dy \qquad (\text{ó}) \quad Dy > Dx$$

o sea, Dx puede ser preferida a Dy, Dx y Dy pueden ser indiferentes o bien Dy puede ser preferida a Dx.

(3.iii). Definición de «decisión» del consumidor: La «decisión» del consumidor es el acto de voluntad que determina en cada caso

(4) Ver SEN, A. K. [16], capítulo 1.1.

cuál de las tres relaciones de preferencia posibles es la que existe realmente en cada caso particular. Por ejemplo: la «decisión» del consumidor establece que:

$$Dx > Dy$$

o sea, que *Dx* es preferida a *Dy*, excluyendo las otras dos posibilidades.

El *stock* de unidades marginales ya poseídas o a disposición del consumidor influyen en su «decisión».

El consumidor conoce las relaciones tecnológicas entre unidades marginales que determinan su carácter complementario, neutral o sustitutivo. La indiferencia puede transformarse en preferencia por medio de una decisión aleatoria.

(3.iv). Decisión plural: la «decisión» plural se establece cuando un consumidor decide que una unidad marginal, por ejemplo *Dx*, es preferida o indiferente a todas las demás unidades marginales ofrecidas en el mercado (5).

En símbolos, la «decisión plural» se representa como:

$$Dx_1 \gtrless (Dx_2\ Dy_1,\ Dz_1,\ Du_1,\ Dv_1,\ Dw_1,\ \ldots)$$

(3.v). La «decisión» del consumidor y la utilidad marginal: Se admite que (ver parte segunda) un consumidor que prefiere una unidad marginal *Dx* a otra unidad marginal *Dy*, asigna mayor utilidad a la primera que a la segunda. Si ambas le son indiferentes, les asigna igual utilidad.

4. *La formación de la cadena de preferencias marginales*

(4.i). Mediante un proceso inductivo (paso a paso) de sucesivas decisiones plurales se genera la cadena de preferencias marginales, que incluye las unidades marginales sucesivamente preferidas, o una cualquiera de las dos indiferentes.

Por ejemplo, mediante las sucesivas decisiones siguientes:

---

(5) Al conjunto de unidades marginales no preferido a *Dx* se le denomina conjunto minorante asociado a *Dx*.

Paso	*Decisiones plurales sucesivas*
1.º	$Dx_1 \succcurlyeq (Dx_2, Dy_1, Dz_1, Du_1, Dv_1, Dw_1 \ldots)$
2.º	$Dy_1 \succcurlyeq (Dx_2, Dy_2, Dz_1, Du_1, Dv_1, Dw_1 \ldots)$
3.º	$Du_1 \succcurlyeq (Dx_2, Dy_2, Dz_1, Du_2, Dv_1, Dw_1 \ldots)$
4.º	$Dv_1 \succcurlyeq (Dx_2, Dy_2, Dz_1, Du_2, Dv_2, Dw_1 \ldots)$
5.º	$Dx_2 \succcurlyeq (Dx_3, Dy_2, Dz_1, Du_2, Dv_2, Dw_1 \ldots)$
6.º	$Dx_3 \succcurlyeq (Dx_4, Dy_2, Dz_1, Du_2, Dv_2, Dw_1 \ldots)$
7.º	$Dy_2 \succcurlyeq (Dx_4, Dy_3, Dz_1, Du_2, Dv_2, Dw_1 \ldots)$

se genera la cadena de preferencias marginales:

$$Dx_1 \succcurlyeq Dy_1 \succcurlyeq Du_1 \succcurlyeq Dv_1 \succcurlyeq Dx_2 \succcurlyeq Dx_3 \succcurlyeq Dy_2 \succcurlyeq \ldots$$

formada por las unidades marginales sucesivamente preferidas.

(4.ii). Los subíndices asignados a las unidades marginales, de uno en adelante, indican el orden en que las unidades marginales son introducidas en la cadena de preferencias marginales.

(4.iii). Ley de la utilidad marginal decreciente: Un consumidor prefiere débilmente una unidad marginal con menor subíndice incluida en la cadena de preferencias marginales a toda unidad marginal del mismo tipo de bien con mayor subíndice. Las unidades marginales introducidas en primer lugar en la cadena de preferencias tienen mayor o igual utilidad que las que les siguen.

5. *La representación semántica de la cadena de preferencias marginales*

(5.i). El consumidor que opera con unidades marginales grandes puede enunciar el resultado de sus decisiones sucesivas mediante el lenguaje hablado (representación semántica).

De acuerdo con las equivalencias establecidas en el apartado 2.ii, la representación semántica de la cadena de preferencias marginales generada en el ejemplo del apartado 4.i será la siguiente:

«una» taza de café $\succcurlyeq$ «un» periódico $\succcurlyeq$
$\succcurlyeq$ «una» camisa $\succcurlyeq$ «un» bistec $\succcurlyeq$ «una»
segunda taza de café $\succcurlyeq$ «una» tercera
taza de café $\succcurlyeq$ «otro» periódico $\succcurlyeq$ …

La representación semántica de las preferencias marginales del consumidor ya fue propuesta en 1888 por el economista austríaco Bonar (6), aunque su propuesta ha sido ignorada.

6. *Segmento de una cadena de preferencias marginales. Definición de una opción*

(6.i). Se denomina segmento a un subconjunto propio o impropio de unidades marginales incluidas en una cadena de unidades marginales finita, con abstracción de la relación de preferencia que entre ellas existe.

Por ejemplo, el conjunto de unidades marginales:

$$(Dx_1, Dy_1, Du_1, Dv_1, Dx_2)$$

constituye un segmento de la cadena de preferencias marginales generada en el ejemplo del apartado 4.i.

(6.ii). Se denomina opción a la suma de las unidades marginales de cada tipo de bien, incluidas en un segmento. El segmento anterior genera la opción:

$$(2 \cdot Dx, 1 \cdot Dy, 1 \cdot Du, 1 \cdot Dv)$$

Esta opción puede escribirse en notación total o marginal del siguiente modo:

$$(2 \cdot Dx, 1 \cdot Dy, 1 \cdot Du, 1 \cdot Dv) = (x_2, y_1, u_1, v_1)$$

Los subíndices de la notación total indican el número de unidades marginales incluidas en la opción.

7. *La regla de elección del algoritmo marginal*

(7.i). Un consumidor que dispone de M unidades de dinero (\$) y desea gastarlas adquiriendo unidades marginales de los distintos

(6) Ver BONAR, J. [1]. También BANFIELD, T. C., y GEORGESCU-ROEGEN anticiparon el algoritmo marginal. Sobre estas contribuciones, ver CALLEJA, C. [4], pág. 64. Ver también VAURIDEL, R. [19].

bienes ofrecidos en el mercado elegirá las sucesivas unidades marginales de la cadena de preferencias, a partir de la primera, hasta que el coste de la opción formada no le permita adquirir una unidad marginal más.

La generación de la cadena de preferencias marginales (ver 4.i) y la comparación de su coste con el dinero disponible (M $) puede hacerse simultáneamente, como en el siguiente ejemplo, continuación del expuesto en 4.i:

Cadena de preferencias	*Coste de las opciones*	*Dinero disponible*
Dx_1	$1 \cdot Dx \cdot P_x$	$< M$
$Dx_1 \succsim Dy_1$	$1 \cdot Dx \cdot P_x + 1 \cdot Dy \cdot P_y$	$< M$
$Dx_1 \succsim Dy_1 \succsim Du_1$	$1 \cdot Dx \cdot P_x + 1 \cdot Dy \cdot P_y + 1 \cdot Du \cdot P_u$	$< M$
$Dx_1 \succsim Dy_1 \succsim Du_1 \succsim Dv_1$	$1 \cdot Dx \cdot P_x + 1 \cdot Dy \cdot P_y + 1 \cdot Du \cdot P_u + 1 \cdot Dv \cdot P_v$	$< M$
$Dx_1 \succsim Dy_1 \succsim Du_1 \succsim Dv_1 \succsim Dx_2$	$2 \cdot Dx \cdot P_x + 1 \cdot Dy \cdot P_y + 1 \cdot Du \cdot P_u + 1 \cdot Dv \cdot P_v$	$\leqq M$
$Dx_1 \succsim Dy_1 \succsim Du_1 \succsim Dv_1 \succsim Dx_2 \succsim Dx_3$	$3 \cdot Dx \cdot P_x + 1 \cdot Dy \cdot P_y + 1 \cdot Du \cdot P_u + 1 \cdot Dv \cdot P_v$	$> M$

y así sucesivamente.

En el ejemplo expuesto, la opción preferida es igual a:

$$(2 \cdot Dx,\ 1 \cdot Dy,\ 1 \cdot Du,\ 1 \cdot Dv)$$

cuyo coste en dinero agota el dinero disponible (M $).

(7.ii). La regla del algoritmo marginal puede aplicarse mediante la representación semántica de la cadena de preferencias marginales (5.i).

La opción preferida según la regla del algoritmo marginal en el ejemplo anterior es en su representación semántica:

(2 tazas de café, 1 periódico, 1 camisa, 1 bistec)

(7.iii). Axioma de discontinuidad (7): Un consumidor elige siempre un número entero de unidades marginales de cada tipo de bien (ver también 19.iii).

(7) El axioma de discontinuidad se encuentra detalladamente desarrollado en CALLEJA, C. [5].

8. *Opción preferida, unidades marginales internas y unidades marginales externas. Regla de equilibrio de Pareto*

(8.i). Las unidades marginales incluidas en la opción preferida según la regla del algoritmo marginal se denominan unidades marginales internas. Las no incluidas en la opción preferida se denominan unidades marginales externas.

En el ejemplo anterior las unidades marginales internas y las unidades marginales externas son, respectivamente:

$$\frac{\text{Unidades marginales internas}}{(Dx_1, Dy_1, Du_1, Dv_1, Dx_2)} \geqslant \frac{\text{Unidades marginales externas}}{(Dx_3, Dy_2, Du_2, Dv_2, Dz_1, Dw_1, \ldots)}$$

(8.ii). La ley de la utilidad marginal decreciente, ver 4.iii, y la transitividad de la relación de preferencia determinan que cualquier unidad marginal del conjunto de unidades marginales internas sea preferido o indiferente a cualquier unidad marginal del conjunto de unidades marginales externas.

Como consecuencia (condición de equilibrio de Pareto) (8), un consumidor no desea sustituir ninguna unidad marginal interna por alguna o algunas unidades marginales externas de igual coste monetario.

(8.iii). La condición de equilibrio de Pareto (9) se cumple si las unidades marginales finales internas son referidas a cada una de las primeras unidades marginales externas, que son las de menor subíndice incluidas en el conjunto externo. Ver también 22.ii.

---

(8) Ver PARETO W. [13], capítulo III, párrafos 22 a 27, especialmente el párrafo 27.

(9) El equilibrio del consumidor se produce, según la condición de PARETO, por el lado del gasto. Si se cumple la condición de PARETO, el consumidor gasta adecuadamente el dinero que recibe. Otra condición de equilibrio se produce por el lado del ingreso. El consumidor está en equilibrio si recibe el dinero necesario para satisfacer sus necesidades (equilibrio de las expectativas). El paro, principalmente, es la causa fundamental del desequilibrio de los consumidores en el capitalismo. También son causas de desequilibrio del consumidor todas aquellas que producen su indigencia (enfermedad, accidente, orfandad, insuficiencia de ingresos, entre otras).

9. *La versión simplificada del algoritmo marginal*

(9.i). La condición de equilibrio de Pareto muestra la posibilidad de una simplificación del algoritmo marginal, mediante la cual la opción preferida puede identificarse sin generar explícitamente la cadena de preferencias marginales.

En efecto: para identificar la opción preferida el consumidor puede solamente identificar el conjunto de unidades marginales interno de coste igual a *M* unidades de dinero ($), del cual no desea sustituir ninguna unidad marginal por una o varias unidades externas de coste equivalente (condición de equilibrio de Pareto). El consumidor decide solamente si incluye o excluye las unidades marginales sucesivas en el conjunto interno de unidades marginales preferidas, sin explicitar el orden interno de las unidades marginales.

Parte segunda: El algoritmo marginal en términos de utilidad marginal.

10. *Utilidad y decisión del consumidor*

(10.i). Tal como ha quedado establecido en el apartado 3.v la utilidad se considera como uno de los elementos determinantes en la decisión sobre las preferencias del consumidor.

La utilidad o capacidad de los bienes de colaborar a la satisfacción de las necesidades de un consumidor puede ser objeto, como se verá en el apartado siguiente, de una medida de carácter ordinal.

11. *Fundamentos para una medida ordinal de la utilidad*

(11.i). Los fundamentos lógicos para una medida ordinal de la utilidad se encuentran en la equivalencia de tipos de orden generados por la relación de preferencia entre las unidades marginales y la relación «ser mayor o igual que» ($\geqslant$) establecida entre números reales no negativos.

Esta equivalencia de orden permite asociar a cada una de las unidades marginales de la cadena de preferencias marginales, por ejemplo, a la cadena generada en el apartado 4.i, un número real, de tal modo que para todo par de unidades marginales se cumpla la siguiente regla de asignación:

Si una unidad marginal es preferida a otra se le asigna un mayor número real, si son indiferentes se les asigna el mismo número real no negativo.

Como ejemplo a la cadena de preferencias marginales de 4.i se le asignan los siguientes números reales:

$$Dx_1 \geqslant Dy_1 \geqslant Dv_1 \geqslant Du_1 \geqslant Dx_2 \geqslant Dx_3 \geqslant Dy_2 \geqslant \ldots$$

$$10 \geqslant 9 \geqslant 7 \geqslant 7 \geqslant 6 \geqslant 3 \geqslant 1 \geqslant \ldots$$

que cumplen la regla de asignación de números antes expuesta.

(11.ii). Si una unidad marginal no tiene utilidad para el consumidor se le asigna el número cero.

(11.iii). Cualquier transformación monótona de la serie de números asignados a las unidades marginales en otra serie de números no negativos puede constituir una medida de la utilidad marginal.

12. *Los índices de utilidad de Menger y la objetivación de la relación de preferencia*

(12.i). Uno de los primeros autores que sugirió la posibilidad de la anterior medida de la utilidad fue el economista austriaco Karl Menger (10), quien, para medir la utilidad, propuso el siguiente experimento hipotético.

Se establece, en primer lugar, una escala de valoración del 0 al 10, semejante a la escala que sirve a los profesores para valorar los exámenes, y se pide al consumidor que atribuya a sucesivas unidades marginales, disponibles en el mercado, una valoración según la contribución que cada unidad marginal efectúa a la satisfacción de sus necesidades.

Efectuado este experimento hipotético, el resultado o Tabla de Menger, reproduce el ya establecido en el apartado 11.i del siguiente modo:

(10) Ver MENGER, C. [12], pág. 127.

Escala de valoración	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Unidades asignadas a cada valoración	Dx_1	Dy_1		Dv_1 Du_1	Dx_2			Dx_3		Dy_2	

(12.ii). Un consumidor, quien dispone en su cerebro de toda la información necesaria para establecer su cadena de preferencias marginales, no necesita esta medida de la utilidad. Sin embargo, un observador (por ejemplo, un economista) puede obtener por este método la información necesaria para conocer objetivamente las preferencias de un consumidor.

Aunque esta medida de la utilidad es generalmente innecesaria, su evidente ventaja consiste en que objetiviza las preferencias de un consumidor.

13. *La medida de la utilidad marginal en régimen de bienes libres y en régimen de escasez*

(13.i). Si los bienes económicos se adquirieran en régimen de bienes libres, con precios iguales a cero, la decisión de preferencia, caso de existir, entre dos unidades marginales estaría determinada solamente por la utilidad de cada una de las unidades marginales.

(13.ii). En condiciones de economía de mercado, los bienes económicos se adquieren en régimen de escasez, con precios positivos. En este caso, la decisión del consumidor que establece la preferencia entre unidades marginales se funda tanto en la utilidad marginal de los bienes como en el coste monetario de los mismos.

Un consumidor, en régimen de escasez, y aunque parezca paradójico, puede preferir una unidad marginal (por ejemplo, un automóvil utilitario) a otra unidad marginal a la cual atribuye mayor utilidad (por ejemplo un Rolls-Royce) si el coste monetario de esa segunda unidad marginal es mucho mayor que el de la primera unidad marginal.

En régimen de escasez, el consumidor prefiere, por tanto, la unidad marginal que le proporciona una mayor utilidad por cada unidad de dinero gastada en su adquisición.

(13.iii). En régimen de bienes libres los índices numéricos de utilidad marginal (ver 12.i) constituyen una medida de la utilidad marginal, ya que es esta magnitud la que determina las preferencias de un consumidor.

En régimen de bienes escasos, los índices numéricos de utilidad marginal (ver 12.i) constituyen una medida de la utilidad marginal del dinero, ya que es esta magnitud la que determina las preferencias del consumidor.

14. *La decisión del consumidor y la utilidad marginal del dinero*

(14.i). La economía neoclásica ha aportado a la teoría de la elección del consumidor un parámetro numérico que considera conjuntamente la influencia que ejercen en la preferencia del consumidor la utilidad marginal y el precio del bien. Este parámetro es la utilidad marginal del dinero (11) definida como el cociente entre la utilidad marginal y el coste monetario de la unidad marginal.

Denominando $u(Dx)$ y $u(Dy)$ a la utilidad asignada a las unidades marginales Dx y Dy en régimen de bienes libres, y $Dy \cdot P_y$ y $Dx \cdot P_x$ a sus costes monetarios, la utilidad marginal del dinero asociada a Dx y Dy, simbolizada $\lambda(Dx)$ y $\lambda(Dy)$ es igual a:

$$\lambda(Dx) = \frac{u(Dx)}{Dx \cdot P_x} \qquad \lambda(Dy) = \frac{u(Dy)}{Dy \cdot P_y}$$

La utilidad marginal del dinero λ es una medida de la utilidad por unidad de dinero gastado en la adquisición de cada unidad marginal.

(14.ii). Un consumidor que considere la elección entre las unidades marginales Dx o Dy, preferirá Dx a Dy, si la utilidad que proporciona gastar las $Dx \cdot P_x$ unidades de dinero necesarias para adquirir Dx es mayor o igual que la utilidad que proporcionaría asignar esa misma cantidad de dinero —$Dx \cdot P_x$— para la adquisición de Dy.

Utilizando los índices numéricos de utilidad marginal puede establecerse que:

$$\lambda(Dx) \cdot Dx \cdot P_x \geqslant \lambda(Dy) \cdot Dx \cdot P_x \qquad \text{(implica que)} \qquad Dx \geqslant Dy$$

(11) Ver Vegara, J. M.ª [18], pág. 15, y Pearce, I. F. [14], pág. 44.

En la primera parte de esa expresión se puede suprimir $Dx \cdot P_x$ de ambos lados de la inigualdad, con lo cual la expresión anterior se transforma en la siguiente:

$$\lambda(Dx) \gg \lambda(Dy) \qquad \text{(implica que)} \qquad Dx \gg Dy$$

Lo cual indica que un consumidor que, en régimen de escasez, prefiere una unidad marginal *Dx* a una unidad marginal *Dy*, asigna a la primera una mayor utilidad por unidad de dinero gastada en su adquisición.

Por tanto, este consumidor obtiene mayor utilidad gastando el dinero necesario para obtener esta unidad marginal *Dx*, de la que obtendría reservando ese dinero para la adquisición (total o parcial) de *Dy*.

15. *Las unidades marginales austríacas de igual coste*

(15.i). Se denominan unidades marginales austríacas (12) a las cantidades de los bienes que pueden adquirirse con una unidad de dinero (1 $). Para los tipos de bien *x* e *y*, las unidades marginales ustríacas *Dx* y *Dy* se definen por la siguiente condición de coste:

$$Dx \cdot P_x = Dy \cdot P_y = 1 \ \$$$

(15.ii). La utilidad marginal del dinero en régimen de escasez es, para las unidades marginales austríacas, igual a la utilidad marginal en régimen de bienes libres.

En efecto, de la igualdad que las define (ver 15.i) se sigue que:

$$\lambda(Dx) = \frac{u(Dx)}{Dx \cdot P_x} = \frac{u(Dx)}{1} \qquad \lambda(Dy) = \frac{u(Dy)}{Dy \cdot P_y} = \frac{u(Dy)}{1}$$

(15.iii). Sin embargo, las unidades marginales austríacas no eliminan la influencia de los costes monetarios y, por tanto, de los

(12) Los traductores de la obra de MENGER, C. [12], que fue traducida en la edición utilizada por J. DINGWALL y B. HOSELITZ, afirman, ver pág. 126, nota a pie de página, que MENGER no dio una definición explícita de la unidad marginal. Sin embargo, los seguidores de MENGER adoptan esa definición.

precios de mercado, en la decisión del consumidor. De su definición (ver 15.i) se sigue que las unidades marginales austríacas son funciones inversas de sus propios precios de mercado. En efecto, de $Dx \cdot P_x = Dy \cdot P_y = 1$ se sigue:

$$Dx = \frac{1}{P_x} = f\,(P_x) \qquad Dy = \frac{1}{P_y} = f\,(P_y)$$

por tanto, la utilidad marginal del dinero es una función de función de los precios de mercado:

$$\lambda(Dx) = u(Dx) = F[f(P_x)] \qquad \lambda(Dy) = u(Dy) = F[f(P_y)]$$

Al efectuar elecciones con unidades marginales austríacas el consumidor debe variar su definición de las unidades marginales cada vez que varían los precios de mercado.

16. *La medida de la utilidad total del dinero asignada a una unidad marginal y a una opción*

(16.i). Se denomina índice de utilidad total del dinero asignado a una unidad marginal, por ejemplo a la unidad marginal Dx, al producto de la utilidad marginal del dinero asignada a esa unidad marginal $\lambda(Dx)$ por su coste monetario $Dx \cdot P_x$ (13). La utilidad total del dinero asignada a Dx es igual a:

$$U_d(Dx) = \lambda(Dx) \cdot Dx \cdot P_x$$

En el ejemplo transcrito en el apartado 12.i se ha asignado a la unidad marginal Dx_1 un valor de la utilidad marginal del dinero igual a 10. Si su coste es igual a $Dx \cdot P_x = 0{,}25$ unidades de dinero ($), su utilidad total del dinero es:

$$U_d(Dx_1) = 10 \times 0{,}25 = 2{,}5$$

---

(13) Si una unidad marginal grande se construye por adición de unidades marginales pequeñas, es conveniente suponer que las primeras unidades marginales pequeñas tienen menor utilidad que las siguientes. Por tanto, la curva de utilidad marginal tiene un primer tramo creciente para alcanzar un máximo, para decrecer luego rápidamente.

Esta hipótesis ya es utilizada por J. R. Hicks en su «curva de valuación». Ver Hicks, J. R. [9], capítulo 9.

(16.ii). Se denomina índice de utilidad total del dinero asignado a una opción a la suma de los índices de utilidad total del dinero asignados a cada una de las unidades marginales que se incluyen en esta opción. Por ejemplo, el índice de utilidad total del dinero de la opción (2 · *Dx*, 1 · *Dy*, 1 · *Du*, 1 · *Dv*) (ver 7.i), es igual a:

$$U_d = U_d(Dx_1) + U_d(Dx_2) + U_d(Dy_1) + U_d(Du_1) + U_d(Dv_1)$$

(16.iii). Un valor numérico del índice de utilidad total del dinero asignado a la opción anterior se obtiene a partir de los valores de la utilidad marginal del dinero asignados en 12.i y según los valores de los costes siguientes:

Unidad marginal	*Medida de la utilidad del dinero*	*Coste de la unidad marginal*	*Medida de la utilidad total del dinero de la opción*
	(1)	(2)	(3)=(1)×(2)
Dx_1	$\lambda(Dx_1)=10$	$Dx \cdot P_x=0{,}25$	$U_d(Dx_1)=\ 2{,}50$
Dy_1	$\lambda(Dy_1)=\ 9$	$Dy \cdot P_y=0{,}20$	$+U_d(Dy_1)=\ 1{,}80$
Du_1	$\lambda(Du_1)=\ 7$	$Du \cdot P_u=2{,}00$	$+U_d(Du_1)=14{,}00$
Dv_1	$\lambda(Dv_1)=\ 7$	$Dv \cdot P_v=6{,}00$	$+U_d(Dv_1)=42{,}00$
Dx_2	$\lambda(Dx_2)=\ 6$	$Dx \cdot P_x=0{,}25$	$+U_d(Dx_2)=\ 1{,}50$
	Utilidad total del dinero de (2·*Dx*, 1·*Dy*, 1·*Du*, 1·*Dv*)=61,80		

(16.iv). El índice de utilidad total del dinero, que fue introducido en la literatura económica por Böhm-Bawerk (14), y varía cuando cambian los precios de mercado.

17. *La condición de equilibrio de Pareto y la maximización del índice de utilidad total del dinero*

(17.i). El consumidor que elige la opción preferida según la regla del algoritmo marginal (ver 7.i) cumple la condición de equilibrio de Pareto (ver 8.ii) y también maximiza el índice de utilidad total del dinero asignado a la opción preferida entre todas aquellas opciones cuyo coste es igual o inferior al dinero disponible (M $).

(14) Ver BÖHM-BAWERK, E. VON [3], volumen II, pág. 147.

(17.ii). Aunque puede darse una prueba formal de esa proposición, el consumidor puede verificarla por medio de una sencilla deducción lógica.

En efecto, los índices de utilidad marginal del dinero asignados a la opción preferida son mayores o iguales que los índices de utilidad marginal del dinero asignados a las unidades marginales externas.

Por tanto, el consumidor gasta cada unidad de dinero de modo que le proporciona la mayor utilidad posible. En consecuencia, la suma de la utilidad aportada por todas las unidades de dinero gastadas (M \$) es también lo mayor posible y no puede ser aumentada sustituyendo unidades marginales internas por unidades marginales externas de coste equivalente.

Como se ha dicho, el consumidor maximiza la utilidad total del dinero empleado en adquirir la opción preferida.

Parte tercera: La relación del algoritmo marginal con el cálculo diferencial.

18. *Las condiciones para un máximo de utilidad según el cálculo diferencial*

(18.i). Un consumidor, cuyas preferencias estuvieran representadas por una función de utilidad $U=F(x, y)$, analítica, continua y doblemente diferenciable, cuando dispone de una cantidad de dinero (M \$) para gastar adquiriendo bienes de consumo, puede identificar la opción que maximiza el valor de la función de utilidad para todas las opciones cuyo coste es igual o inferior a M \$, por medio de la solución del siguiente sistema determinado de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, que son, respectivamente:

$$\text{(I)} \quad M = x \cdot P_x + y \cdot P_y$$

$$\text{(II)} \quad O = dx \cdot P_x + dy \cdot P_y$$

$$\text{(III)} \quad \frac{U'_x}{P_x} = \lambda$$

$$\text{(IV)} \quad \frac{U'_y}{P_y} = \lambda$$

Son datos del problema la función de utilidad $U=F(x, y)$, los precios P_x, P_y y el dinero disponible M. La ecuación (II) se deriva de la (I) (15).

La solución identifica la opción (x_i, y_k), cuyo valor en la función de utilidad $U(x_i, y_k)$ es un máximo relativo de la función. La solución identifica también un valor de la utilidad marginal del dinero que corresponde a los límites de los índices de utilidad marginal del dinero de las unidades marginales finales (ver 22.iii).

19. *Los diferenciales y la definición neoclásica de la unidad marginal. El axioma de discontinuidad*

(19.i). La ecuación (II) del sistema anterior: $dx \cdot P_x + dy \cdot P_y = 0$ define los diferenciales dx y dy como cantidades de los bienes x e y de igual coste monetario en términos absolutos, ya que se cumple que:

$$dx \cdot P_x = dy \cdot P_y$$

de modo análogo a las unidades marginales austríacas (ver 15.i). Por tanto, los diferenciales dx y dy se definen como cantidades inversas a sus precios:

$$dx = \frac{1}{P_x \cdot k} \qquad dy = \frac{1}{P_y \cdot k}$$

donde k es una variable que tiende a infinito, ya que los diferenciales son cantidades variables cuyo valor puede ser menor que cualquier número real no negativo, condición que se cumple al tender k a infinito.

(19.ii). En el análisis económico neoclásico el límite de los diferenciales, que corresponde también al límite de pequeñez de las unidades marginales austríacas, se ha considerado o bien igual a cero o bien igual a un infinitésimo (16).

Si el límite de los diferenciales se considera igual a cero, el concepto de unidad marginal desaparece, ya que el cero constituye la

(15) Ver CHIANG, A. [8], 12.i a 12.iv.
(16) Ver SAMUELSON, P. A. [15], pág. 373.

negación de la unidad marginal. El límite cero de los diferenciales convierte en evanescente a la unidad marginal (17).

La unidad marginal infinitesimal, que es el otro límite posible de los diferenciales, puede considerarse como una de las partes que resulta de dividir una cantidad arbitraria de un bien, por ejemplo del bien *x*, en un número infinito de partes (18).

Sin embargo, de acuerdo con la concepción del infinito de Cantor (19), este límite no puede alcanzarse nunca por una división sucesiva (paso a paso) de la cantidad del bien *x*. Como los números transfinitos cantorianos son números no inductivos, la unidad marginal infinitesimal será también una cantidad inalcanzable en la vida práctica.

Paradójicamente, el marginalismo neoclásico, basado en la hipótesis de continuidad, no puede proporcionar una definición satisfactoria de la unidad marginal.

(19.iii). Como Samuelson señala al analizar este problema (20) en la realidad física, todos los bienes son no divisibles más allá de cierta cantidad (quanta). Por tanto, entre el límite matemático (cero o infinitésimo) y el límite real del diferencial no existe identidad.

El límite físico de los bienes divisibles (sal, agua, hilo), aunque sea muy pequeño (21), existe y está constituido por una molécula o un átomo. Por tanto, puede enunciarse el siguiente axioma de discontinuidad: «El límite de pequeñez de la unidad marginal es finito. Si se toma como unidad marginal la cantidad más pequeña

---

(17) Una opción cualquiera (x, y) se convierte, si la unidad marginal es igual a cero, en una doble suma de infinitos ceros: $(x, y) = (0 \cdot \infty 0 \cdot \infty)$. Este es uno de los problemas fundamentales del cálculo diferencial, denominado problema de los agregados, conocido desde la época de los filósofos griegos.

(18) *Según la concepción, anterior a* CANTOR, *del infinito, el infinitésimo* era igual a $1/\infty$, que era una expresión indeterminada, generalmente igualada a cero. Al introducir CANTOR el alef cero y el alef uno, los infinitésimos pueden considerarse como sus inversos, es decir, uno partido por alef cero y uno partido por alef uno. Ver CALLEJA, C. 6.

(19) Ver CANTOR, G. [7].

(20) Ver nota 16.

(21) El concepto de cantidad pequeña es relativo. Una cantidad pequeña *lo es siempre en relación con otra que es grande. Una gota de agua* puede ser muy grande para un infusorio y pequeña para el hombre. Al calificar como pequeña una cantidad, el hombre la refiere a la cantidad normal que necesita para un fin. Esta cantidad normal o grande se relaciona con el concepto de unidad marginal grande.

posible de un bien, todas las cantidades de este bien se miden en números enteros» (22) (ver 7.iii).

20. *La cadena de preferencias marginales generada por medio de la función de utilidad*

(20.i). Utilizando diferenciales finitos, arbitrariamente pequeños, y de igual coste monetario (ver apartado 19.iii) la cadena de decisiones que establece la cadena de preferencias marginales de un consumidor puede generarse usando la función de utilidad $U=F(x, y)$ de acuerdo con la siguiente regla de decisión fundada en la función de utilidad:

Un consumidor que ya posee la opción $(x_r, y_s)=(r \cdot dx, s \cdot dy)$ preferirá la unidad marginal dx_{r+1} a la unidad marginal dy_{s+1} si el valor de la función de utilidad para la opción (x_r+dx_{r+1}, y_s) es mayor que el valor de la función de utilidad para la opción (x_r, y_s+dy_{s+1}).

En símbolos:

(si) $U(x_r+dx_{r+1}, y_s) > U(x_r, y_s+dy_{s+1})$ (entonces) $dx_{r+1} > dy_{s+1}$

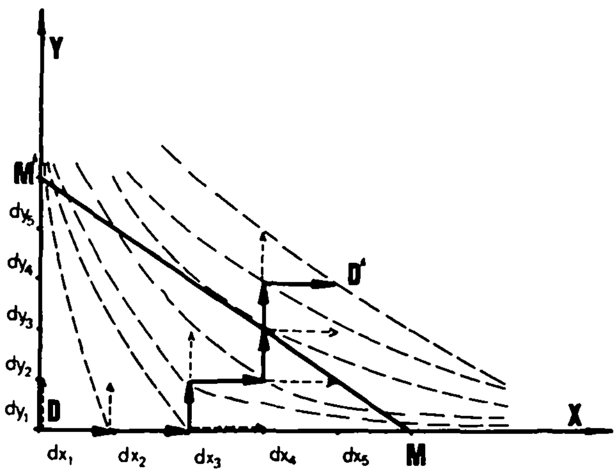

FIGURA 1

(22) Este axioma ha sido ya enunciado y utilizado en lógicas de la elección finitas marginales por Calleja, C. Ver [4] y [5].

cuando los diferenciales dx_i, dx_{i+1}, dy_k, dy_{k+1} se consideran variables que tienden hacia cero. Al calcular la derivada U'_x el valor y_k permanece constante, mientras que al calcular la derivada U'_y, el valor de x_i permanece constante.

Estas expresiones ponen de manifiesto que los diferenciales que definen las derivadas parciales en el entorno del máximo de utilidad $U(x_i, y_k)$ son cantidades equivalentes a las unidades finales internas y externas que establecen la condición de equilibrio de Pareto (24) (ver 22.ii).

En el entorno del máximo los valores numéricos de la sucesión monótona decreciente que define el límite por su izquierda son mayores que el valor de λ, que a su vez es mayor que los valores de la sucesión monótona decreciente que genera el límite λ por su derecha.

Por tanto, los valores finitos de las unidades marginales arbitrariamente pequeñas (ver 20.i) usadas para generar la cadena de preferencias marginales por medio de la función de utilidad, al estar incluidas en las sucesiones anteriores, cumplen las siguientes desigualdades:

$$\lambda\ (dx_i) > \lambda > \lambda\ (dx_{i+1}) \qquad \text{(y)} \qquad \lambda\ (dy_k) > \lambda > \lambda\ (dy_{k+1})$$

y ya que λ es el límite común de ambas derivadas, puede establecerse que:

$$\lambda\ (dx_i) > \lambda > \lambda\ (dy_{k+1}) \qquad \text{(y)} \qquad \lambda\ (dy_k) > \lambda > \lambda\ (dx_{i+1})$$

expresiones que escritas en términos de preferencia son:

$$dx_i > dy_{k+1} \qquad \text{(y)} \qquad dy_k > dx_{j+1}$$

las condiciones de equilibrio, según Pareto, enunciadas por medio de unidades marginales finales (ver 22.ii) (25).

---

(24) En la figura 1 puede apreciarse que las unidades marginales finales son dx_3 y dy_2, mientras que las unidades marginales externas son dx_4 y dy_3. Estas unidades marginales son la base tanto de las condiciones de equilibrio de PARETO, según las unidades marginales finales, como del proceso de paso al límite que genera las derivadas, por su izquierda y por su derecha, cuando el diferencial de la función de utilidad tiende hacia cero.

(25) Se ha considerado que una condición de equilibrio suficiente es la igualdad de la utilidad marginal del dinero o, si las unidades marginales son de igual coste, de la utilidad marginal de las dos últimas unidades marginales internas: dx_i, dy_k en el argumento analítico y dx_3, dy_2 en el gráfi-

(22.iv). La condición de equilibrio de Pareto se cumple iqualmente para el algoritmo marginal y para el cálculo del máximo mediante un sistema de ecuaciones. Por tanto, el máximo identificado (x_j, y_k) ha de ser necesariamente el mismo en ambos casos.

23. *Conclusiones*

(23.i). Para calcular máximos la razón humana opera por medio de métodos muy simples. Para identificar la casa más alta de una calle o la flor más hermosa le basta con ordenar el conjunto (finito) de casas y el conjunto (finito) de flores según la propiedad «altura» o «hermosura».

Este sencillo método puede aplicarse con diferentes artificios para resolver problemas más complejos. En la elección del consumidor, éste debe elegir entre millones de opciones potenciales. El artificio matemático establecido mediante el algoritmo marginal consiste en ordenar las unidades marginales de modo que cada unidad de dinero gastado aporte la máxima utilidad posible. En este caso la opción elegida, cuyo coste es el dinero disponible (*M* $) maximiza la utilidad.

El algoritmo marginal puede aplicarse o bien directamente o bien con ayuda de una función de utilidad. Por medio de la función de utilidad se conocen todas (infinitas) relaciones de preferencia entre pares de unidades marginales y pares de opciones. La función de utilidad sería un formidable «almacén» de conocimiento de las preferencias del consumidor.

El consumidor, sin embargo, no es consciente de todas sus preferencias, que van generando a medida que las necesita para efectuar elecciones reales. A pesar de esa limitación, como se ha mostrado en la parte tercera, los resultados obtenidos pueden considerarse análogos a los que se obtendrían por medio del uso del cálculo diferencial.

---

co 1. Sin embargo, estas condiciones no son ni condiciones necesarias ni condiciones suficientes de equilibrio. En virtud del principio de tricotomía, ver 3.ii, entre dos unidades marginales cualesquiera, incluidas, por tanto, las finales, puede darse siempre que una tenga mayor utilidad que otra o que la utilidad de las dos sea igual.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] BONAR, J.: «The Austrian Economists and their Views of Value», *Quaterly Journal of Economics*, 1888.

[2] BOYER, C.: «The History of the Calculus and its Conceptual Development», *Dover Publications, Inc.*, New York, 1959.

[3] BÖHM-BAWERK, E. VON: «Capital and Interest», *Libertarian Press*, South-Holland, Illinois, 1959.

[4] CALLEJA, C.: «La teoría de la utilidad». La lógica de la elección del consumidor bajo el axioma de discontinuidad, *Grafisa*, Barcelona, 1968.

[5] CALLEJA, C.: «La teoría de la producción y la discontinuidad», presentada en la Universidad Complutense de Madrid, junio 1971, tesis doctoral.

[6] CALLEJA, C.: «Sobre la falsetat del teorema de la diagonal de Cantor i sobre l'infinitèsim com un número transfinit», presentado al Instituto de Estudios Catalanes, 1975.

[7] CANTOR, G.: «Contributions to the Foundings of the Theory of Transfinite Numbers», *Dover Publications Inc.*, New York, 1955.

[8] CHIANG, A.: «Fundamental Methods of Mathematical Economics», *Mc-Graw-Hill Books, Co y Kogakisha Company, Ltd.*, Tokyo.

[9] HICKS, J. R.: «Revisión de la teoría de la demanda», *Fondo de Cultura Económica*, México-Buenos Aires, 1958.

[10] JOHANSEN, L.: «Labour Theory of Value and Marginal Utility», *Economics of Planning*, Vol. 3, 1963.

[11] KAUDER, E.: «A History of Marginal Utility Theory», *Princeton University Press*, 1965.

[12] MENGER, C.: «Principles of Economics» (First General Part), *The Free Press of Glencoe*, Illinois, 1950.

[13] PARETO, W.: «Manuel d'Economie Politique», cuarta edición, *Libraire Droz*, Génova, 1965.

[14] PEARCE, I. F.: «A contribution to Demand Analysis», *Oxford University Press*, 1965.

[15] SAMUELSON, P. A.: «The Problem of Integrability in Utility Theory», *Economica*, November, 1950.

[16] SEN, A. K.: «Collective Choice and Social Welfare», *Holden Day, Inc.*, San Francisco, 1970.

[17] STIGLER, G. J.: «Essays in the History of Economics», *The University of Chicago Press*, 1965.

[18] VEGARA, J. M.ª: «Programación matemática y cálculo económico», *Vicens i Vives*, Barcelona, 1975.

[19] VAURIDEL, R.: «La Demande des Consommateurs», *Librairie Armand Colin*, París, 1958.

[20] WOLD, H., and JUREEN, L.: «Análisis de la demanda» (Un estudio de Econometría), *Instituto Superior de Investigaciones Científicas*, Madrid, 1956.